


NATVS ANNO CIↃ.IↃ.LXXXIV. OBIIT ANNO CIↃ.IↃC.LXVII.
GREGORIVS à SANCTO VINCENTIO
BRVGENSIS, EX SOC. IESV,
GEOMETRA SVBTILISSIMVS.
Tota geometras numerat quot Græcia, in vno
Vt simul aspicias, aspice GREGORIVM.
Richard Collin sculp.

R. P. GREGORII
À S.TO VINCENTIO
E SOCIETATE IESU

OPUS
GEOMETRICUM
POSTHUMUM

AD
MESOLABIUM
PER
RATIONUM PROPORTIONALIUM
NOVAS PROPRIETATES.

QUORUM OPERIS HUJUS
SYNOPSIS ANTEVERTIT.

GANDAVI,
Typis BALDUINI MANILII, Typographi Iurati, sub signo Albæ
Columbæ Anno 1668.

Superiorum Permissu,



N. pinxit 1653 Richard Collin sculp. 1668

R. P. GREGORII
À S^{TO}. VINCENTIO
EX SOCIETATE IESU

OPUS
GEOMETRICUM
POSTHUMUM

AD
MESOLABIUM
PER

RATIONUM PROPORTIONALIUM
NOVAS PROPRIETATES.

FINEM OPERIS MORS
AUTHORIS ANTEVERTIT.

GANDAVI,
Typis BALDUINI MANILII, Typographi Iurati, ſub ſigno albæ
Columbæ Anno 1668.

Superiorum Permiſſu.

FACULTAS
R. P. PROVINCIALIS.

EGo infra-scriptus Societatis JESU per Flandro-Belgicam Præpositus Provincialis, potestate mihi ad hoc factâ à P. N. Joanne Paulo Oliva ejusdem Societatis Præposito Generali, facultatem concedo BALDUINO MANILIO Typographo Gandavensi imprimendi Opus Geometricum ad Mesolabium per rationum proportionalium novas proprietates compositum à P. GREGORIO à S^to. VINCENTIO ex eadem Societate, & à Deputatis Societatis nostræ Revisoribus examinatum & approbatum, in quorum fidem has manu mea subscriptas & Officii mei sigillo munitas dedi Gandavi 22. Aprilis 1668.

THOMAS DEKENS.

APPROBATIO CENSORIS.

HIc Liber, cui Titulus: R. P. GREGORII à S^to. VINCENTIO ex Societate JESU *Opus Geometricum posthumum ad Mesolabium, per rationum proportionalium novas proprietates*, nihil continet Orthodoxæ Fidei vel bonis moribus contrarium, ac proinde committi prælo, & sic in lucem prodire valuerit. Datum *Gandavi* 9. *Maij.* 1668.

H. HESIUS, S. Theol. Lic. Exemptæ Cathedralis Ecclesiæ S. BAVONIS, Canon. Grad. & Archidiac. Librorum Censor.

PROOEMIUM

De natura Rationis Geometricæ.

NUllus vel leviſſimè in Geometria verſatus infi-ciabitur, vix a ſeculis exſtitiſſe Problema, quod magis exercuerit, & luſerit omnium Geometrarum operam, quam quod praxim cubi vel ſphæræ duplicandæ Geometricam requirit. Et vero, quis non miretur per reculam tantillam viris doctiſſimis, ipſi etiam Archimedi, Pappo cęteriſque Geometriæ Primatibus, qui problemata abſtruſiſſima, & propoſuerunt ac ſolverunt, remoram iniectam fuiſſe, quam ne quidem rudi populo explicare auſi ſunt, ut probrum evaderent? Dum cogitationes ſimiles non raro occurrerent animo, neſcio quâ paſſione motus, mecum varia verſari cæpi, quæ mihi adjumento forent originem tantæ difficultatis indagandi, quâ benè perſpectâ gradum facerem ulteriora tentandi: devoratis magno tædio, in tali contemplatione, multis cerebri vexis, perſpexi tandem ſimili problematum genere nihil aliud inquiri, quam datam rationem certa determinatione partiri; ſive rationis exhibitæ menſuram aliquam, quæ & ipſa rationis nomenclaturam expoſceret, invenire, quæ toties in ſe ducta, quot medietates requiruntur inter terminos, aut magnitudines datas, per tales multiplicationes rationem producat, quæ inter duas illas exhibitas quantitates reperitur. Quâ proprietate moroſâ conſideratione multum ventilatâ, & me cæteroſque omnes, qui in problemate Deliaco ſolvendo oleum & operam perdiderunt ridere cæpi: Quod Problema, cujus ſubſtantia in rationum geometricarum naturâ omnino conſtituta eſt, alieno a rationum diſcurſu ratiocinio ſcrutari tentaſſent. Totam itaque ſcientiam, quam de Proportionalitatibus Geometricis commentus fueram, voluere & revoluere cæpi, ut ea via tentarem perrumpere, quæ talem ſcintillam lucis intellectui objectabat.

Poſt varia concluſi Problema de medietatibus plane univerſale eſſe debere, neque facilius eſſe datam rationem, per rationem aliquam in tres partes diſpeſcere, quàm in partes quovis numero poſtulatas. Stitit ea reflexio curioſitatem meam, & tantum non ab ulteriore indagine animum avertit, cum nucleum uſque adeo univerſalem exhiberi poſſe negarem, qui Problemati tantæ vaſtitatis expediendo compar eſſet. Nihilominus converti me (animi cauſâ magis, quam ſpei fiduciâ aliquid cognoſcendi quod ad rem faceret) ad Medietatum conſiderationem: primo, quas in figuris lineis rectis deſcriptis adnotarem; deinde, quæ in Circulis, imo & El-

lipsibus; ulterius quoque in Parabolis; denique in Hyperbolis occurrerent; ut in vasta illa Medietatum silva venabula collocarem, quibus forte fera, quam venarer, comprehensa fugâ sese expedire nequiret. Post meditationem maturam sane, atque morosam, cum nihil occurreret, quod tam vasto Problemati solvendo inservire posset, cogitationes meas a tali subducendi materia suasit desperatio: sed illa paulatim disparente, denuo animum pulsari adverto, speciesque quæ Mezolabii spem præseferebant imaginationi objiciuntur, etiam nolenti, imo summo studio reluctanti; donec tandem nucleus quidam apparuit, quem plane ad rem facere mihi ita persuadebam, ut ab ejus consideratione cogitationes semovere nullo studio valerem. Occurrebat enim rationum argumentionem per rationes ita firmandam, ut nucleus argumentationis semper involveret rationes multiplicatas vel æquemultiplicatas, nec unquam a discurrendi methodo recedendum, quæ talis fundamenti considerationem non implicaret. Longo satis temporis spatio exercuit me talis inventionis titillatio, & ad ulteriora indaganda pellexit, sed vano eventu: Nullam etenim proprietatem aut sequelam, vel obstinato nisu aut conamine reperire potui, quam ex tali principio deducerem, v. g. si ratio A ad B toties est multiplicata C ad D, quoties ratio E ad F est multiplicata G ad H, quid inde inferri poterit, quod alicujus proprietatis vicem obtinebit, quæ in tali genere discursus usui esset, & communis Geometriæ principiis inserviret. Cumque in universa Geometria talis argumentandi ratio non exstaret, prorsus animo concidi, & cogitationes alio converti. Remansit tamen aliquis animo pruritus, qui subinde species intermissas per reminiscentiam repræsentaret, non sine fiducia adipiscendi ea, quæ desperatio cum indignatione & rancore excusserat. Adverti quoque non inutilem talium specierum memoriam mihi obversari, qua ad ulteriorem in materia rationum notitiam sentiebam me promoveri, quæ res etsi non videretur primo intuitu ad rem facere, nihilominus ipsa novarum rerum curiositas animos addebat, ut sæpius intermissarum rerum memoria recurrens morosiore consideratione digna videretur.

Quid sit Ratio Geometrica.

PErsuasum mihi erat antiquæ Geometriæ principia nullatenus esse sufficientia ad problemata, quæ hucusque desiderata sunt expedienda. Varias itaque considerationes commentus sum inter quas eæ, quæ rationes inter se comparant, non postremum locum obtinerent. Quia vero ipsa nomenclatura rationis nescio quid reconditi insinuare videatur; curiosius ejus naturam indagare institui: quare ejus definitionem, quæ in elementis ab Euclide ejusque Commentatoribus traditur, morosa consideratione pertractandam statui: Cumque in consideratione definitionis ab Euclide definit. 3. lib. 5. Elemento-

mentorum diutius immorarer, occurrit definitio quinta ejuſdem libri, quæ ut melius explicet naturam rationis Geometricæ, proprietatem ejuſdem naturæ maximè convenientem in medium adducit, quâ paulatim innoteſcat quid nomenclatura rationis, Geometriæ elementis emolumenti importet, dicens: *Rationem habere inter ſe magnitudines, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe invicem ſuperare.*

Prius itaque ſtabilire neceſſarium judicavi, quod rationes veræ quantitatis nomenclaturam, hiſce duabus definitionibus expreſſam, ſibi vendicent.

Rationes veræ quantitates ſunt, iiſque convenit tam additio quam multiplicatio.

RAtionem unam alterâ majorem aut minorem eſſe, in comperto eſt: Nam ratio 4. ad 1. major eſt illâ, quæ eſt 4. ad 2. unde concluditur quod una minor ratio, addito ſibi augmento alterius rationis, queat datam rationem excedere. Quia vero utitur Euclides vocabulo *Multiplicatæ*, conſiderandum eſt, tot modis augeri aut diminui poſſe inter ſe rationes, quot ipſæmet aliæ quantitates accreſcere aut mutilari perhibentur, cum liquidò conſtet ipſas rationes inter ſpecies quantitatis locum ſuum requirere. Augentur primo quantitates ſimplices, ut linea ſuperficies & corpus, per multiplicationem; ſecundò per additionem ſimilis ſpecie quantitatis. Quodſi datis tribus quantitatibus linearibus, quarum prima ſit unius palmi, ſecunda duorum, tertia quatuor, multiplicetur prima per tertiam emerget quantitas ſpecie quidem diſtincta, hoc eſt quantitas ſuperficialis, quæ tamen æqualis erit quantitati ſuperficiali, quæ exurget ex multiplicatione lineæ bipalmaris in ſe ipſam ductæ aut multiplicatæ. Quod ſi vero lineæ palmari adjungatur bipalmaris, prodibit tripalmaris, quod incrementi genus prorſus a priore diverſum eſt. Quare ſi rationum naturam inter quantitatum ſpecies locum ſibi vendicare conſideremus, has etiam proprietates definitionibus Euclidæis allatis poſtulare decernimus. Convenit itaque omni rationi definitio quinta lib. 5. Euclidis, ac proinde ſi rationum quantitates, hoc eſt (ut poſtea explicabimus) earum denominatores, inter ſe multiplicatæ aliquam rationem efficiunt, rectè ex ejus mente dicetur orta ratio ex rationibus compoſita.

Supereſt igitur ut alteram proprietatem, quæ in vera additione conſiſtit rationibus applicemus: Iure enim poſtulat quęvis ratio, quoniam inter ſpecies quantitatis adnumeratur, poſſe augeri aut diminui. Sit data quævis ratio v. g. 12. ad 3. augenda per rationem aliam, ſcilicet 8. ad 4; quia in modo augmentandi aliquam rationem viâ multiplicationis, utitur Euclides multiplicatione denominatoris in denominatorem, poſſet quæri, an in additione rationis unius ad alteram recurrendum ſit ad denominatores, & loco multiplicationis debeamus uti additione earundem denominatorum ad invicem, quemadmodum in duabus rationibus 12. ad 3. & 8. ad 4. an denominator 4. prioris rationis 12. ad 3. additus

denominatori posterioris rationis qui est 1. efficiat illam rationem, quę ex conjunctione duarum illarum rationum quęritur. Cui questioni satisfactum credam, si praxi utamur, quę Computistis familiaris est, dum duas fractiones in unam aggregare student multiplicando numeratorem A per denominatorem D, ut resultet E, deinde ex multiplicatione numeratoris C per B denominatorem ut exurgat F: fiat deinde G ex additione E & F, denique ex multiplicatione mutua denominatorum B in D emergat H; erit fractio G H æqualis duabus fractionibus simul sumptis A B, C D. quia vero omnes fractiones in numerum rationum aggregantur, etiam rectè infertur quod ratio G ad H

A	C	G
12	8	72
	X	
3	4	12
B	D	H
24	48	
F	E	
72		
G		

ęqualis sit duabus rationibus A B, C D simul sumptis sive additis. Sed cum fractiones omnes, quæ Arithmeticam spectant commensurabiles sint, aliam praxim docuimus libro de proportionalitatibus, quę universalior est, & incommensurabilibus etiam inserviens.

Quæ Ratio dicenda sit major, quæ minor.

PRæsens locus exigit etiam mentionem fieri, quæ inter duas datas rationes debeat dici major, quæ vero minor. Dicit enim Euclides propositione 8. lib. 5. Elem. *inæqualium magnitudinum major ad eandem majorem rationem habet, quam minor: & eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem.* Formatur hîc difficultas a nonnullis, quæ tandem abit in quæstionem de nomine. Volunt namque nonnulli evertere propositionem Euclidis, hoc discursu: Sit, aiunt, aliqua progressio Geometrica v. g. A, B, C, D, E, F, G, ratio A ad B ducta in rationem B C producit rationem A ad C, similiter ratio A ad C ducta in rationem C D producit rationem A D: ratio autem A ad D est triplicata rationis A ad B, cujus tantum est duplicata ratio A ad C; igitur ratio A ad D major est ratione A ad C, vel A ad B, ex eo quod triplicatum sit majus duplicato: Secundum vero mentem Euclidis, cum C sit major quantitas quam A, & D major quam sit C vel A, debet dici D majorem rationem habere ad A quam habeat C ad eandem A, & consequenter A minorem habere rationem ad D, quam A ad C vel A ad B: Pugnant itaque inter se hæ propositiones A ad D majorem habet rationem quam ad B; & A ad D minorem habet rationem quam ad B. Ad elucidationem hujus materiæ, adverto sensum verborum, quibus utitur Euclides, valde esse diversum a sensu aliorum, qui definitionem impetunt, & majoritatem rationis constitutam volunt per multiplicatam magis ac magis rationem; Euclides autem considerat rationem quatenus magnitudo est, & consequenter dum rationem cum ratione confert, com-

A	B	C	D	E	F	G
1	2	4	8	16	32	64

parat

parat illas inter se tamquam veras quantitates. Quis autem alicui persuadebit quartam partem scuti majorem esse quam sit medietas ejusdem. Quin imo quo magis fractiones majoris & minoris inæqualitatis inter se multiplicantur, eo producunt semper minorem numerum, igitur aliud est rationem tanquam quantitatem alterari per multiplicationem, aliud augeri per collationem factam per additionem. Id quod dicitur magis vel minus multiplicatum non infert quantitatis augmentum, cum in fractionibus oppositum verum sit.

Quod autem quidam juniores naturam rationis constitutam asserunt in sola multiplicatione eam a speciebus quantitatis eximunt, aut dicere nequeunt, quod omnia, quæ inter species quantitatis locum sortiuntur gaudere debeant iis proprietatibus, quæ omnibus communes sunt; vnde non sanum de natura rationum ferunt judicium, excludendo veram additionem, quâ ratio rationi adjuncta sumit incrementum. Qui enim negant in serie A B C D E F G aggregatum rationum A B, B C, C D, D E, E F, F G, constituere aliquam rationem, falluntur; non producitur autem ratio A ad G per additionem, (Quomodo enim plures rationes per solam aggregationem coustituent aliquam rationem, eamque minorem quavis illarum, quæ in aggregato reperiuntur?) sed prævia multiplicatione: distingui itaque debet modus augendi rationes per multiplicationem ab illo qui fit per additionem.

A	B	C	D	E	F	G
1	2	4	8	16	32	64

Ratio æqualitatis non est purum nihil.

SEd quid de illis dicam, qui asserunt rationem A G majorem esse illâ, quam habet A ad B, & rationem æqualitatis purum nihil esse affirmant, quæ tamen omnium rationum perfectissima est, quippe quæ regula est, per quam magis perfectæ a minus perfectis rationibus dignoscuntur? Pappus lib. 3. Collectionum prop. 17. & 18. docet modum formandi ex terminis proportionalibus omnes medietates Geometricas, imo ex tribus æqualibus terminis. Dicit enim: positis A 4. B 4. C 4. tribus æqualibus quantitatibus, utrique A C unà cum duabus B æqualis ponatur D 16. utrique autem B C æqualis sit E 8. & ipsi C æqualis F 4. hoc posito fundamento ab omnibus Geometris admisso constituantur loco trium simplicium quantitatum A 4. B 4. C 4. tres rationes æquales inter se, qualescumque illæ sint, & constructio Pappi servetur, producetur simili modo ex his rationibus, secundum Pappum constitutis, ratio dupla: Quodsi autem ratio æqualitatis nihil est, quomodo ex nihilo formari possunt omnes rationes? Profecto aliquid altioris toni præstitêre Pappus & similes, qui ex nihilo docuerunt formare infinitas rationum series. Sint tres rationes æquales A, B, C, igitur ex mente Pappi A & C, & duę B ęquabuntur quadruplę A similiter B cum C æqualis erit duplæ ipsius A, denique assumatur ratio A, exsurgent, uti prius, rationes duplæ. Ulterius si consideremus naturam

A	B	C
$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{6}$

 ratio-

rationum, de quibus antiqui mentionem nobis reliquerunt, inveniemus omnem proportionem ab illis consideratam in æqualitate consistere; quod ex ipsa definitione proportionis, quam nos docuerunt, liquido constat. Proportio enim, rationum similitudo dicitur; similitudo autem idem sonat quod æqualitas, nam in rei veritate similes rationes & eædem rationes synonima sunt. Quomodo autem argumentum deductum ab æqualibus rationibus aliquid concludere natum est, si rationum æqualitas nihil sit? Ecce quomodo Geometriam traducant, qui rationes æquales unum purum nihil esse affirmant. Nulli itaque in mentem veniat credere similibus persuasionibus, quia ratio æqualitatis non solum in numerum rationum admitti postulat, sed omnium perfectissima dici suo jure præsumit; sola quippe æqualitatis ratio altioris mysterii symbolũ est. Quod si libuerit quamcumque rationem penitius considerare majoris inæqualitatis rationalis, quæ in numeris versatur, inveniemus eam constitutam esse ex mera additione æqualium rationum; igitur dici incongruum est rationem æqualitatis nihil esse: assumatur quævis ratio 12 ad 2, numquid ea denominationem habet quod sit sextupla? igitur mensura, quę utrumque terminun commensurat, ostendit partes æquales reperiri in toto majori termino, qui sint omnes æquales termino minori. Assumpsi quidem exemplum in materia rationum commensurabilium, non quod in quantitatibus irrationalibus vim eandem non obtineat, sed sufficit ut falsitatis arguatur doctrina eorum, qui scientias a veteribus magno labore ac industria adinuentas, vitiare student. His ulterius non immoror, ne solicitudo nimia alicujus dubiæ rei suspicionem causet.

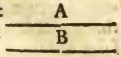
De denominatoribus Rationum.

VEnio autem ad dilucidationem cujusdam principii ab antiquis nobis relicti, de quo in libro de proportionalitatibus mentionem feci, licet hoc ipsum a nonnullis hujus ævi Geometris demonstratum videatur; quod ita sonat. *Quantitas rationis, sive denominator ductus in consequentem terminum rationis, producit antecedentem.* Hoc autem principium fundamentum est alicujus dubii, an omnis ratio certum & determinatum ex natura sua requirat denominatorem; quod omnino veritati consentaneum videtur. Si enim plures denominatores diversi assumi possunt datæ alicujus rationis, scilicet unus altero major, si major eorum ductus in consequentem rationis terminum, exhibeat antecedentem, igitur minor ductus in eundem consequentem terminum exhibebit antecedentem a priore producto prorsus diversum: Quare videtur asserendus cuique rationi proprius denominatur, & non vagus. Res hæc aliquod lumen requirit ut tenebræ disspareant, quæ veritatem obnubilant.

Circa igitur rem præsentem, notandum est: Antiquos nunquam mentionem fecisse de denominatore alicujus rationis, nisi in materia numerica, in quâ facile est cujusvis rationis assignare denominatorem, ac

ac proinde certum & determinatum, qui ductus in consequentem terminum proferat antecedentem. Cum autem methodus sit reperta comparandi inter se quasvis Geometricas rationes, aliter hoc principium explicandum est, ut suam quoque obtineat dignitatem in Geometricis. Judico igitur frustra quærendum denominatorem alicujus rationis in quantitatibus continuis, qui unitatis rationem sibi vindicet.

Detur enim aliqua ratio, quæcumque ignota, scilicet lineæ A ad B. Peto quæ sit futura illa quantitas, vel linealis vel superficialis, aut solida, quæ ducta in terminum B exhibeat lineam A? linea enim B, si multiplicetur per aliam lineam, profert quantitatem specie distinctam a linea A. In quantitate vero discteta, cum duo termini rationem, quam inter se continent, manifestam ita reddant, ut intelligatur ex ipsis terminis mensura, quę utrumque terminum commensuret, non est mirum, quod ratio illis contenta reducta ad minimos terminos ostendat unitatẽ, quæ consequens est denominatoris, qui ductus in terminum consequentem rationis producit antecedentem. Verum continua quantitas caret ex natura sua aliquo determinativo, quo fruitur discreta; assumi tamen potest quæcumque linea pro unitate, modo reliquæ, quæ cum hac comparantur, sint proportionales: Sit enim ratio quævis A B & quævis magnitudo C, & fiat ut A ad B, ita C ad D, erit ratio C D demominator rationis A B, igitur erit D unitas ad denominatorem C; convenietque denominatori C principium prædictum (quod ab antiquis denominatori rationis numeris expressæ attribuitur) hoc sensu: quod denominator C ductus in B consequentem terminum, producat antecedentem A ductum in unitatem D: non autem simpliciter producit antecedentem terminum A prout in numeris videre est; quia in quantitate continua C in B non producit lineam sed superficiem, quæ comparari nequit cum linea A nisi hæc similiter per ductum in D transferatur ad speciem superficiei. Neque hoc a mente antiquorum alienum videtur, cum in rei veritate, & in numeris A ducatur in D, quamvis illâ differentiâ, quod in ductu qui fit in numeris, producta non mutent speciem quantitatis. Sed si curiosius indagare studeamus, quem usum denominator alicujus rationis per se obtineat, inveniemus nullum habere majorem eo, quem habet ipsamet ratio, cujus est denominator. Cur igitur tanta molimine disputatio formanda est de natura denominatoris alicujus rationis, cum ipsamet simplex ratio nullum in Geometria usum habeat si solitariè consideretur.



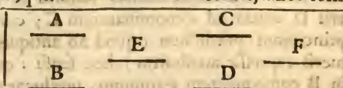


Quodsi vero datas duas rationes inter se conferre vel libuerit, vel necesse fuerit, assumpto quocumque termino pro denominatore unius, si per constructionem Geometricam fiat ut ratio prima ad secundam rationem, ita terminus assumptus ad alium, deveniemus quantocius in cognitionem duarum illarum rationum per collationem & notitiam denominatorum, qui sive fuerint exhibiti in majoribus quantitatibus, sive minoribus, eandem conferent notitiam Geometræ. Atque illa fuit

causa

causa cur quamlibet magnitudinem pro denominatore cujuscumque rationis assumi posse, docuerim, eo quod ratio solitariè sumpta majorem usum non habeat in Geometricis, quam quævis linea data, sed collata cum altera scientiis inservit, cujus collationis notitia e duobus denominatoribus fit perspecta. Atque ex dictis satis explicata est causa cur in discreta quantitate aliter procedendum sit circa denominatorum mentionem, quam in quantitate continua, licet talis disputatio ad summam rei parum, vel nihil conferre videatur: Datis quippe duabus rationibus in continua quantitate, si quis utriusque proprium denominatorem assignasse se profiteatur, qui singuli unitatis locum obtineant, eandem illi denominatores inter se rationem sortiantur necesse est, quam quævis duæ magnitudines praxi nostra repertæ, quæ denominatorum loco constitutæ non minus denominatorum nomenclaturam sibi vendicant, quam quæ unitatis vices supplere affirmabantur.

Exigit ulterius hæc materia, ut doceamus non magis assignandum esse denominatorem rationis sive in discreta, sive in continua quantitate, quam in ipsismet proportionibus, quæ binis constant rationibus. Mutila enim esse perhibetur Antiquorum Geometria, si ea quæ de rationibus simplicibus in medium attulerunt, ad proportiones ipsas non extendantur, quæ causa est (ut ex discursu hujus libri apparebit) cur doctrina, quæ Mezolabium concernit, tanto tempore delituerit. Sint itaque duæ rationes A B & C D, quarum denominatores existunt E & F: igitur proportio rationis A B, ad C D est ratio E ad F; igitur patet quod etiam ratio E ad F postulet nomenclaturam denominatoris, & quod in discreta manifestum est, etiam continuæ quantitati applicari, secundum doctrinam quam libro de proportionalitatibus Geometricis præmisimus. Quod si enim proportio in duabus rationibus consistit, profecto nullo modo illa innotescet si unico denominatore contenti esse debeamus. Quare cum proportio determinari nequeat aut cognosci nisi per duos denominatores, necessarium est, ut cuique rationi suus denominator asignetur, ut per unius cum alterius collationem aliqua doctrina scientificè colligatur. Atque ea quæ de proportione, quæ inter quasvis duas rationes reperitur, dicta sunt, extendi etiam volumus ad omnem casum, quo duæ proportiones innotescere debent, quæ omnia non parum adferunt luminis ad naturam denominatoris comprehendendam. Docuimus libro de Hyperbola; si constituta sit Hyperbola inter suas asymptotos, & cuidam asymptoto tres lineæ proportionales, aut aliter ponantur æquidistantes, quæ duo segmenta constituant hyperbolica, quod ratio terminorum primi segmenti, toties sit multiplicata rationis terminorum secundi segmenti, quoties segmentum primum est multiplex secundi segmenti. Quo posito inquiritur; an illa segmenta



vendicent ſibi nomen denominatoris. Ad quod reſpondeo, primo. Quod aliud ſit petere, quæ ſit ratio inter duas rationes, aliud quoties una alterius ſit multiplicata: neque exiſtimo ullum fore hujus materiæ gnarum, qui oppoſitum ſentiat. Secundo, quod ſi quis denominatoris notitiam extendere deſiderat, dicendo ſegmenta illa vendicare, ut dicantur denominatores multiplicatæ rationis, quibus ſcilicet dignoſcatur (datis duabus rationibus) quam ſit major multiplicata minoris, per me licet, nego tamen id per ſanam doctrinam fieri poſſe.

Ulterioris lucis cauſa ponantur duæ ſeries diverſę rationum proportionaliũ ABCDE, & FGHKL;

A	B	C	D	E
F	G	H	K	L

erit ratio A ad E toties multiplicata rationis A ad B, quoties ratio F ad L eſt multiplicata rationis F ad G, nullatenus tamen dici poteſt, quod ratio A ad E ſit ad rationem A B, quemadmodum eſt ratio F L ad F G, cum ſint ex ſuppoſitione ſeries diverſæ, ita ut ſeries prima nihil habeat commune cum ſerie ſecunda in materia rationum: Ergo luce clarius patet, aliam eſſe conſiderationem, quâ conferuntur duæ rationes ſecundum habitudinem, quam inter ſe habent, ab illa, quâ inquiritur, an una magis ſit multiplicata alicujus determinatę rationis, quam ſit altera.

De ratione compoſita.

VIdetur ſupereſſe alia conſideratio ad naturam rationum explicandam idonea, quæ duas rationes examinat prout ex aliis rationibus componuntur, quemadmodum ratio duarũm magnitudinum quarumcumque A, B, compoſita dicitur ex quibuſvis rationibus terminorum C, D, E, vel plurium, qui inter ipſas magnitudines A, B, interponantur: ſic etiam contingat in rationibus duabus A B & C D, ut exhibitis quibuſvis rationibus intermediis E F, G H, K L aut pluribus liceat eandem proprietatem illis attribuere, quæ rationi in duabus magnitudinibus conſiſtenti familiaris eſt.

A	C	D	E	B

A	E	G	K	C
B	F	H	L	D

Ad illam quæſtionem reſpondemus, non ſolum talem proprietatem rationibus convenire, ſed peculiari modo illis congruere. Dico igitur primo; rationem A B ad C D eſſę compoſitam ex rationibus quibuſvis intermediis, E F, G H, K L, Ponantur enim M, N denominatores rationum A B & C D, deinde rationum A B, E F, G H, K L C D, ſint denominatores M, O, P, Q, N dicetur ex communi Geometria ratio M ad N compoſita ex rationibus M O, O P, P Q, Q N, igitur etiam ratio A B ad C D licitè dicitur compoſita ex rationibus A B ad E F, & E F, ad

M	O	P	Q	N
A	E	G	K	C
B	F	H	L	D

GH, GH ad KL, denique KL ad CD, non minus atque, denominatorum ratio, quæ non differt a proportione ſuarum rationum, quarum perhibentur denominatores.

Dico deinde ſecundo, quod rationes AB & CD aliqua prærogativa gaudent, quæ eſt communis M ad N rationi, ſcilicet quod ſive ratio AB ad CD multiplicetur per rationes intermedias EF, GH, KL, ſive quævis duæ aliæ ex eodem numero aſſumantur, nempe EF, KL, multiplicentur per reſiduas rationes, ſemper emerget ratio æqualis illi, quæ ex multiplicatione AB in EF, & GH, KL & CD exurget. Summa etenim, quam producunt rationes AB, EF, GH, KL, CD inter ſe multiplicatæ, æquatur rationibus EF, AB, KL, CD, GH per multiplicationẽ inventis ut oſtendimus lib. de proport. prop. 98. in opere Geom.

Tertio dum dicitur, quod ratio AB ad CD componitur ex intermediis rationibus EF, GH, KL, non eo ſenſu intelligendum eſt, quem in præcedenti aſſertione attulimus, quaſi ex illis multiplicatis rationibus emergat ratio æqualis aggregato rationum illarum per multiplicationem invento: Aliud enim eſt dicere ratio AB ad CD; aliud ratio AB in CD. Dum enim dico ratio AB in CD, ſimplicem rationem, per multiplicationem rationis AB in CD, inventam mihi repræſento. Dum vero dico ratio AB ad AC; non rationem aliquam per multiplicationem inventam, ſed habitudinem ipſius rationis AB ad rationem CD conſidero.

De Rationibus multiplicatis & æquemultiplicatis.

Explicatâ aliquatenus doctrinâ, quæ naturam rationum concernit in materia Geometrica, opere prętium duxi, quædam enucleatius conſiderare quę rationum multiplicationem ſpectant, & modos loquendi, qui ſæpenumero uſui ſunt: Rarus enim hucuſque fuit in Geometricis uſus proportionalitatum, cumq; præſens tractatus per comparationes rationum & inter ſe collationes procedat, non inmerito ſuſpicionem movere quis poſſet, an ea quæ in medium proferuntur ita conſcripta ſint, ut omnis, qui in principiis communis Geometriæ verſatus eſt, ſine ulteriore doctrinâ has lucubrationes intellectu percipere aptus videri debeat: Quæ conſideratio a ſuſpicione probabilitatis aliena non videtur. Unde ordiemur ab explicatione quæſtionis quâ non nemo requireret ſibi ſatiſfieri petenti quid ſit unam rationem eſſe alterius multiplicatam vel æquemultiplicatam, & conſequenter de proportionibus.

Ut igitur mentem noſtram Lector aſſequatur recurremus primo ad terminos communes Geometrię ſcilicet A, B, C, D, E, quos ſupponemus in eadem ſerie eſſe conſtitutos, ut dicantur eſſe proportionales aut in continua analogia, unde cum ſint quinque quantitates, & reſpectus primæ ad ſecundam aliquam rationem ſecum adducat, etiam reſpectus ſecundæ ad tertiam eandem rationem ſibi eodem

A	B	C	D	E
——	——	——	——	——

dem jure vendicat, respectus autem tertiæ ad quartam tertiam postulat, sicut respectus quartæ ad quintam quartam requirit; & quia hi termini supponuntur esse in continua Analogia, talis erit respectus primi termini ad secundum, qualis secundi ad tertium & tertii ad quartum, denique quarti ad quintum; unde hæ rationes dicuntur æquales, similes vel si mavis etiam eædem. Quia vero ratio A B si multiplicetur vel per se, vel per rationem B C producit rationem A ad C, cum ratio A ad C sit composita ex ratione A ad B & B ad C, dicitur ratio A C duplicata A B rationis, & ratio A D triplicata rationis A B, sicut & ratio A E ejusdem A B quadruplicata. Quia vero ratio A B quater in se ducta exhibet rationem A E, & rationes omnes B C, C D, D E æquales sunt rationi A B, hinc rectè dicitur ratio A B esse mensura rationis A E, eo quod aliquoties repetita adæquet totam rationem A E. Dicitur itaque ratio A E multiplicata rationis A B, eo quod ratio A B quater in seipsam vel in rationes sibi æquales ducta producat rationem A E: dicitur autem quater multiplicata ratio A E rationis A B, ad similitudinem quantitatum, quæ conficiunt aliquam aliam quantitatem in proportione terminorum eorundem secundum doctrinam in Elementis Geometricis explicatam, in qua nihil frequentius est quam usus alicujus modi loquendi, quo utimur dum dicimus: ita se habet A ad B sicut B ad C, quod in idem recidit acsi dicatur, tam multiplex est A ipsius B quam est multiplex B ipsius C. Hæc vero loquendi formula, vel consistit in quantitatibus, quæ Arithmeticam sortiuntur conditionem, vel in magnitudinibus quæ proprietatibus Geometricis gaudent. Si enim sint sex numeri 6, 5, 4, 3, 2, 1, & aliquis requirat quam sit multiplex numerus senarius unitatis, respondebitur sexies multiplex, eo quod unitas sit mensura, quæ sexies sumpta exhibeat numerum senarium, Si vero eâdem formula loquendi uti velimus in quantitatibus sub Geometrica contemplatione solum consideratis, non dicetur tam est multiplex sex ipsius quinque, quam est quinque ipsius quatuor, ac proinde unitas, quæ prius inserviebat ut mensura communis numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, non erit mensura earundem magnitudinum; quia alios denominatores postulant, dum secundum proprietates Geometricas conferuntur, qualis esset inter numeros 16. 8. 4. 2. 1. quæ multiplicationem spectat. In illo enim casu non solum termini sicut in additione factum est, sed ipsorum ratio in considerationem cadit. Quia vero ratio 16 ad 8 dupla est, quemadmodum & ratio 8 ad 4, & 4 ad 2, denique 2 ad 1, petitur quam si multiplex ratio 16 ad 1, rationis 16 ad 8, & quia per multiplicationem rationis 16 ad 8 quater sumpta producitur ratio 16 ad 1, dicitur ratio 16 ad 1 quadruplicata rationis quam habet 16 ad 8, & minimè quadrupla qualis exhibebatur in collatione terminorum secundum seriem Arithmeticam.

Modus igitur qui in serie Arithmetica dicitur duplus aut quadruplus in Geometrica materia rationum effertur per rationes duplicatas, triplicatas aut quadruplicatas. Utque his præmissis ad nodum enodandum revertamur.

 Dici-

Dicimus in materia rationum non minus eſſe aſſignabiles partes, & partium partes, atque in ipſis aliis Geometricis magnitudinibus, quoniam, ut in opere noſtro Geometrico docuimus, etiam rationes inter quantitatum ſpecies numerari poſtulant, ac proinde omnibus proprietatibus obnoxiæ ſunt, quibus reliquæ magnitudines ſubjectæ ſunt, quæ ſpecies quantitatis aſſeruntur. Quare cum dicitur Ratio unius eſſe alterius multiplicata, nihil aliud innuitur quam quod ratio major poſſit dividi in aliquot quantitates ſibi ſimiles, quemadmodum linea vel ſuperficies in partes ex quibus conſtituitur, Sicut enim linea diviſibilis eſt in quotvis æquales partes ſecundum datum numerum, ita diviſibilis quoque eſt quævis Ratio, in tot Rationes æquales, in quot partes linea recta diviſa eſt. Ulterius uti lineæ diviſæ in partes continuè proportionales, quædam ex illis aſſumi poteſt pro menſura totius lineæ ad illius magnitudinem compertam reddendam ſecundum Rationes Arithmeticas: ita quoque Ratio quæcumque poſtulat poſſe dividi in rationes vel æqualitatis ſeriei vel proportionalis continuæ, ut de illis eadem formetur argumentandi & diſcurrendi norma, qua in Geometria communi uſi ſumus: nam ſicut cujuſvis lineæ partes lineæ ſunt, ita ſimiliter quævis partes rationis rationes exiſtunt. Atque hęc ſufficere mihi viſa ſunt, ad queſtionis illius explanationem, quam requirebat modus loquendi, quo utimur dum de Ratione hac vel illa, magis vel minus alterius multiplicata agimus.

Supereſt aliquid dicendum de formula loquendi huic ſatis affini, dum dicimus unam rationem tam eſſe multiplicatam alterius, quam ſit tertia multiplicata quartę. Sint igitur duæ ſeries proportionalium A, B, C, D, E, & F, G, H, K, L, ita ut in utraque ſerie terminorum numerus æqualis ſit, ſitque prima ſeries rationis duplæ, ſecunda vero rationis triplæ.

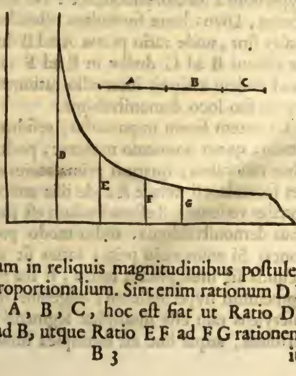
A	B	C	D	E
16	8	4	2	1
F	G	H	K	L
81	72	9	3	1

His poſitis ratio A E, ut jam expoſuimus dicitur quadruplicata rationis A B, eo quod A B quater ſumpta per multiplicationem adæquet rationem A E. Sed quia ex præmiſſis conſtat rationem F L dici eodem jure quadruplicatam rationis F G (eo quod ratio F G ſit menſura commenſurans latitudinem rationis F L, ratio enim F G quater in ſe ducta conſtituit rationem F L) bene infertur, quod tam ſit multiplicata ratio A E rationis A B, quam eſt multiplicata ratio F L rationis F G: nam utraque ſeries tam rationem A E quam rationem F L proferens, conſtituitur per propriam ſuam menſuram quater in ſe ductam, quæ ſunt ratio A B in ſerie dupla & in progreſſione tripla ratio F G.

De Rationibus proportionalibus.

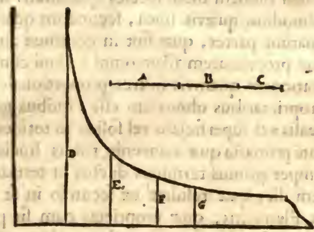
VT ulteriorem lucem addamus explicandum quoque reſtat quo ſenſu dicantur plures rationes proportionales, ad quod clarius expediendum, reſumo denuo quod ante inſinuatum eſt: Rati-

onem omnem inter species quantitatis adnumerandam esse, & quemadmodum quævis linea, secundum quamvis rationis seriem in tres vel quatuor partes, quæ sint in continua analogia, divisibilis est, sic quoque proprietatem illam omni rationi communem esse, & consequenter Rationem quamvis in tres proportionales Rationes divisam iis omnibus proprietatibus obnoxiam esse, quibus gaudet quævis magnitudo vel linealis vel superficialis vel solida in totidem partes distincta. Proprietas autē primaria quæ convenit tribus lineis proportionalibus, est quod semper primus terminus ductus in tertium exhibeat magnitudinem parem illi, quæ resultat ex secundo in se ducto, quod notissimum est ex Elementis, quæ proprietas cum sit potissima magnitudinibus, quæ proportionales sunt, necessario etiam rationibus, quæ proportionales asseruntur convenire debet. Sint itaque A B C D magnitudines proportionales in aliqua 8 4 2 1 serie continuatæ, verbi gratia, A, B, C, D in ratione dupla. Sunt igitur hæ rationes proportionales in continua analogia, eo quod semper eædem aut similes sint, & sic non est mirum quod prima in tertiam ęquetur mediç ductæ in se per multiplicationem. Quia vero in seriebus rationum rationes non sunt semper eædem, oportet hoc ipsum explicare, quo pacto rationes etiam in apparentia dissimillimæ possit non solum dici, sed verè esse proportionales. Juxta leges cujuscumque seriei simplicium quantitatum in continua serie existentium; nisi quantitatum, quę dicuntur proportionales, prima ad secundam eandem sortiatur rationem vel similem aut ęqualem cum ea, quam obtinet secunda quantitas ad tertiam, & tertia ad quartam, nullo modo in communi Geometria proportionales dicentur, ac proinde carere debebunt primaria proprietate proportionalibus debita. Itaque Rationum proportionalium primam esse ad secundam ut secunda ad tertiam &c. constare debet, ut appareat Rationum proportionalium naturam non esse alienam a communis Geometrię fundamentis. Sint D E, E F, F G, Rationes proportionales, ita ut termini D, E, F, G, non sint proportionales, si petatur cur hę rationes tam inter se diversæ & discrepantes dici queant proportionales: Respanderi poterit non esse inter se ita dissimiles, quin sibi reservent similitudinem talem, quæ capaces illas efficiat, ut dicantur verissimam uniformitatē servare, secundum quam in reliquis magnitudinibus postulent omnē adipisci magnitudinum proportionalium. Sint enim rationum D E, E F, F G denominatores rectæ A, B, C, hoc est fiat ut Ratio D E ad E F, rationem, ita linea A ad B, utque Ratio E F ad F G rationem,



ita

ita linea B ad C; Cum igitur supponantur rationes, DE, E F, F G proportionales erunt quoque denominatores A, B, C, in continua Analogia, cum non differant denominatores a suis Rationibus; si igitur A, B, C, proportionales sint, erunt rationes A ad B & B ad C æquales, & consequenter ratio quæ est inter rationes D E ad E F æqualis est rationi, quæ est inter rationes E F & F G. Dicuntur ergo Rationes D E, E F, F G dissimiles quia Rationes terminorm dissimiles sunt, alia enim est Ratio inter rectas D & E, quam sit terminorum E F, vel F G. Dicuntur autem Rationes proportionales, eo quod ratio quæ invenitur inter primam & secundam rationem æqualis sit rationi quæ invenitur inter secundam & tertiam rationem. Differunt tamen Rationes proportionales ab aliis magnitudinibus proportionalibus, quod magnitudines alię proportionales sint in eadem ratione cum suis differentiis, Rationes autem proportionales differentiis gaudeant æqualibus, ut postea demonstrabitur.



Est præterea aliquis loquendi modus, qui sæpenumero recurret, cum oportebit affirmare, quod ratio A ad B sit ad rationem B ad C sicut ratio E ad F ad rationem F ad G. Si quis genuinum hujus enuntiationis sensum requirat, respondendum erit hanc formulam nihil aliud intendere, quam ut affirmetur quod ratio A ad B superet rationem B ad C eodem rationis intervallo, quo ratio E ad F excedit rationem F ad G. Atque hoc liquidè apparebit, ex iis quæ in materia Hyperbolica demonstrabuntur: Ne autem suspensum relinquam Lectorem, Dico: hanc formulam ostendere quod rationes illæ proportionales sint, unde ratio prima A ad B ducta in quartam F ad G, æquatur rationi B ad C ductæ in E ad F rationem, igitur bene sequitur quod eodem rationis intervallo rationes inter se differant. Verum apertius suo loco demonstrabitur.

Ut autem finem imponamus, residua restat explicanda quædam dubitatio, quam nonnemo moveret, postulando an datis tribus aut pluribus rationibus, quarum prima toties est multiplicata secundæ, quoties secunda est tertiæ &c. de illis enuntiari possit, quod sint proportionales rationes? Respondendum est juxta doctrinam, quam in sequentibus demonstrabimus, nullo modo proportionales dici posse illas rationes. Si enim ratio prima toties sit multiplicata secundæ, quoties secunda sit multiplicata tertiæ, si hæ rationes transferantur in aliquod segmentum hyperbolicum, cogemur assere segmentum primæ rationi inserviens tam esse multiplex segmenti, quod secundam rationem determinat, atque hoc est multiplex illius segmenti, quod tertiam rati-

onem

onem includit; unde tunc ſegmenta illa eſſent in continua ratione Geometrica, Verum aſſerimns, quod poſtea demonſtrabitur, ſegmenta ut exhibeant tres rationes proportionales, debere neceſſario eſſe in ſerie quantitatis diſcretæ, ſi non ſint in ſerie æqualitatis.

Igitur inferendum eſt rationes omnes, quæ talem exhibent ſeriem, ut prima toties ſit multiplicata ſecundæ, quoties ſecunda eſt multiplicata tertiæ, & tertia quartæ &c. nullatenus dici poſſe proportionales.

Quamvis quæ allata ſunt aliquo pacto ſufficientia videri poſſint, ut naturã rationum & quæ ad eas ſpectant nota faciant; juvabit nihilominus, quæ ſequuntur conſiderare, quæ proprietates ſatis a communi ſenſu alienas continent, & ad problematum ſolutiones valde opportuna judicantur.

Ratio igitur qua de agimus inter binas magnitudines conſiſtit prout altera alterius parti æqualis eſt, aut inæqualis, quæ conſideratio diſcretæ quantitatis terminos non prætergreditur. Cum autem duæ rationes inter ſe conferuntur, quæ ſimiles ſunt, proportionem conſtituunt; nam rationes inter ſe comparantur praxi, quæ cum linearum relatione communis eſt. Verum rationum duarum collatio, quæ inæquales ſunt, ut Geometricis principiis adnumerari queat, binas alias rationes requirit, quarum una ſimilis primæ datarum altera ſecundæ; ut omnimodè uniformitas perſeveret in proportionalitatibus, quam principia Geometrica in rationibus ac proportionibus ſtatuerunt.

Cum autem omnem hanc materiam, quæ conſiderationes rationum complectitur, non infelici ſucceſſu proceſsiſſe adverti, cogitationes, quæ me in deſperationem adegerant excutere cæpi, & ad ulteriorem indaginem animus excitatus eſt: Quare in omnem me verſavi rationem, ut telam, quam ordiri cæperam, proſequerer. Aſſumpſi, ut in opere conſtabit, primo rationes inter ſe conferre, quæ in ſola rectarum linearum collatione conſiſterent; Deinde quæ in triangulorum proprietatibus latentes, occurrerent; Vlterius quas Circulorum, & in illis verſantium linearum, ſecantium, tangentium & ſimilium proprietates conſiderationi oportunas ſubminiſtrarẽt, Imo & Ellipſium, earumdemque cum circulis ſymbolizationes non prætermiſi, quin imo Parabolicas affectiones, quas rationibus implicarem, diligentius inveſtigare aggreſſus ſum; Denique hyperbolicas rationes, quæ mihi ſubminiſtrarunt in Opere Geometrico materiam non contemnendam inſtituto meo, aggreſſus ſum, & ut mihi perſuadeo, ſucceſſu non infelici prout docebunt, quæ decurſu Libri ſequuntur Theoremata ac problemata, nec injucunda, nec ad rem noſtram, quam intendimus præſtandam, inutilia.



LIBER PRIMUS.

DE LINEARUM DIVISIONIBUS

Prout, ad rationum proprietates explicandas, inserviunt.

ARGUMENTUM.

Primum hunc Librum in tres partes divisimus, quarum
Prima proprietates seriei Arithmeticæ exponit:
Secunda agit de quibusdam progressionis Geometricæ proprietatibus:
Tertia denique rationes proportionales, divisas, & in invicem ductas considerat.

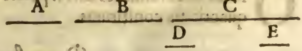
PARS PRIMA.

De quibusdam proprietatibus seriei Arithmeticæ.

PROPOSITIO PRIMA.

SI recta divisa fuerit in tres partes seriei Arithmeticæ: Dico totam lineam mediæ triplam esse.

Demonstratio.



SINT A, B, C magnitudines in serie Arithmetica minoris inæqualitatis; igitur B continet A, & differentiam quâ B excedit A: sed etiam C continet A & simul differentiam inter A & B, insuper quantitatem E (quæ est æqualis D) quâ superat ipsa C lineam B: nam lineæ A, B, C æquali sese excessu superant: in tribus ergo his magnitudinibus A, , B, C reperiuntur tres quan-

titates æquales A, & aliæ tres æquales ipsi D: atqui ipsa B continet semel A, & semel D: sunt itaque A & C duplæ ipsius B; quare tota linea A B C tripla est rectæ B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IJ.

DIvisa sit quęvis linea in tres partes secundum aliquam seriem Arithmeticæ progressionis:

Dico quod, in serie minoris inæqualitatis, pars prima minor sit tertia parte totius lineæ; in serie autem majoris inæqualitatis, pars prima duabus tertiis totius semper minor erit.

Demonstratio.

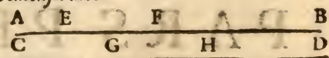
PEr præcedentem propositionem constat mediam inter tres partes, in serie Arithmetica constitutas, æqualem esse tertiæ parti aggregati totius, unde primus terminus, in minoris inæqualitatis serie, cum debeat esse minor secundo, necessarium est, ut sit tertia parte totius minor; quia vero in serie majoris inæqualitatis primus terminus secundo major est, hinc secundus debet tertio major esse, & quia primus tertio additus duplus est secundi, hinc primus necessario minor est duobus tertiis aggregati totius.

PROPOSITIO IIJ.

SI duæ æquales lineæ in tres partes diversæ seriei Arithmeticæ, divisæ fuerint:

Dico medias utriusque seriei æquales esse.

Demonstratio.

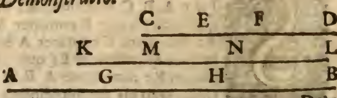


POnantur A B & C D æquales lineæ divisæ secundum mentem propositionis: oportet ostendere medias lineas E F, & G H inter se æquales esse. Per primam hujus recta A B tripla est lineæ E F; igitur etiam C D, quæ supponitur æqualis A B, est tripla rectæ E F: sed per eandem primam etiam C D linea, est tripla rectæ G H; igitur manifestum est quod æquales sint rectæ E F & G H: Quod demonstrare oportuit.

PROPOSITIO IV.

OMnis linea infinities dividi potest in tres partes; in serie discretę quantitatis constitutas.

Demonstratio.



Data

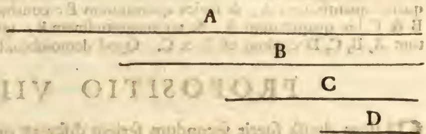
DAta quavis A B assumatur alia quædam C D, divisa in tres partes discretæ quantitatis, [a] & dividatur A B in G & H prout divisa est C D a 10. *Sexti.* in E & F, erit itaque A B in G & H divisa in serie Arithmetica, deinde si K L divisa sit in alia serie Arithmetica, & dividatur A B prout K L divisa est, erit denuo A B divisa secundum seriem discretæ quantitatis: Unde cum infinitæ lineæ exhiberi queant in tres partes Arithmeticæ seriei divisæ, patet infinitis etiam modis datam aliquam A B eodem modo divisibilem esse.

PROPOSITIO V.

SInt A & B inæquales lineę, quarum tertiis partibus sint æquales C & D.

Dico quod toties possit dividi linea A in tres proportionales in serie Arithmetica; ut C sit media trium, quoties dividi potest linea B in tres partes, ut D sit media.

Demonstratio.

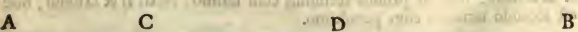


NEqueunt hæ duæ lineæ A & B dividi in tres partes in progressione Arithmetica ut mediæ inter illas existant C & D, quin [b] relinquant duas ex- b 1. *Hujus* tremas partes, quæ simul sumptæ constituant duas duplas rectarum C & D, sed duæ illæ residuæ possunt semper similiter dividi, ita ut earum partes simul sumptæ eandem rationem obtineant cum mediis C & D; ergo toties recta A potest dividi in tres partes in serie Arithmetica, ut C sit media trium, quoties potest dividi linea B in tres pattes, quarum media sit linea D.

PROPOSITIO VJ.

DAtam A B divisam in C, ut A C sit tertia parte minor, totam A B denuo partiri in D, ut A C, C D, D B constituant aliquam seriem quantitatis discretæ.

Constructio & Demonstratio.



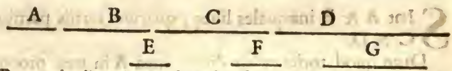
FIat C D æqualis tertiæ parti totius A B; eritque perfectum quod requiritur. Prima enim hujus docet, quoties linea in tres partes proportionales dividitur in serie quantitatis discretæ, totam lineam mediæ trium esse triplam; unde cum C D sit æqualis tertiæ parti A B, patet A C cum D B duplam esse C D, & consequenter A C distare a C D, eâdem differentiâ quâ C D differt a linea D B.

PROPOSITIO VIJ.

QUod ſi magnitudo juxta ſeriem Arithmeticam in quatuor partes diviſa fuerit:

Dico totum aggregatum quatuor partium, duarum mediarum duplum exiſtere.

Demonſtratio.



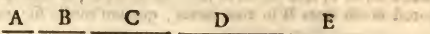
SInt A, B, C, D magnitudines in Arithmetica ſerie, igitur B continet A & differentiam E, quâ B ſuperat A; ſed C continet B, hoc eſt A & E ſimul cum differentia, quâ C ſuperat B: ac proinde continet C, præter quantitatem A, etiam duas quantitates æquales ipſi E: verum D continet C, hoc eſt ſemel A & bis quantitatem E, ac præterea differentiam, quâ D ſuperat C, quæ etiam æqualis eſt E; igitur in tota magnitudine A, B, C, D eſt reperire quater quantitatem A, & ſexies quantitatem E: continet autem magnitudo B & C bis quantitatem A, & ter magnitudinem E; igitur totum aggregatum A, B, C, D duplum eſt B & C. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO VIIJ.

SI linea diviſa fuerit ſecundum ſeriem diſcretæ quantitatis, in partes numero impari:

Dico terminum primum cum ultimo, æquari ſecundo cum penultimo &c.

Demonſtratio.



SIt linea aliqua diviſa in quinque partes A, B, C, D, E, ſecundum ſeriem Arithmeticam, erunt quoque partes B, C, D proportionales Arithmeticè, igitur per primam hujus linea B C D tripla eſt rectæ C: Quia vero ſunt in ſerie Arithmetica partes A, B, C, D, E, igitur æquali ſeſe exceſſu ſuperant, & C ſuperat A duplici exceſſu, quo B ſuperat A, ſimiliter E ſuperat C duplici exceſſu, quo D ſuperat C, hoc eſt quo B ſuperat A, igitur C ſuperat A eodem exceſſu quo E ſuperat C, unde partes A, C, E ſunt in progreſſione Arithmetica, & conſequenter lineæ A, C, E triplæ rectæ C: unde tam B & D ſimul duplæ ſunt ipſius C, quam A & E duplæ ſunt ejuſdem C. æquales igitur ſunt A & E ſimul, hoc eſt primus terminus cum ultimo, rectis B & D ſimul, hoc eſt ſecundo termino cum penultimo.

PROPOSITIO IX.

SI magnitudo diviſa fuerit ſecundum ſeriem Arithmeticam, in partes numero pares:

Dico rurſus primum terminum cum ultimo, æquari ſecundo cum penultimo &c.

Demon-

Demonstratio.

A B C D E F

SIt magnitudo aliqua divisa in sex partes secundum seriem Arithmeticam, scilicet in partes A, B, C, D, E, F, dicit præsens propositio lineam A cum F, æqualem esse lineæ B cum E; quod sic demonstro: Quoniam sunt in serie Arithmetica lineæ A, B, C, D, E, F, erunt quoque rectæ B, C, D, E in Arithmetica serie, igitur per septimam hujus partes B, C, D, E simul duplæ sunt partium C, & D: sed A superat C duplo excessu, quo B superat C, & D superat F duplo excessu, quo E superat F, hoc est quo B superat C, igitur A superat C eodem excessu quo D superat F, addatur igitur excessus quo A superat C ipsi C, & excessus quo D superat F addatur ipsi F, erit A ęqualis rectæ C cum suo additamento, & D æqualis F cum suo additamento; igitur erit A & F cum sibi addito, æqualis C cum sibi addito & simul D. Ablatis igitur æqualibus, manet A cum F æqualis C cum D, rectæ igitur A, C, D, F duplæ sunt rectarum C & D, quarum quoque duplæ demonstratæ sunt, rectę B, C, D, E, ablatis igitur C & D, manent A cum F, & B cum E æquales, hoc est terminus primus cum ultimo æqualis secundo cum penultimo.

NOTA.

Quod dixi primum terminum cum ultimo æqualem esse secundo cum penultimo, sive magnitudo aliqua divisa sit in partes impares sive in pares, intelligendum quoque est de tertio cum antepenultimo & sic semper sumendo terminos æqualiter distantes a medio si numerus impar sit, vel a duobus mediis, si numerus terminorum par sit.

PROPOSITIO X.

SI linea divisa fuerit secundum seriem discretæ quantitatis, in partes numero impares:

Dico quod totum aggregatum toties continebit mediam, quot partes in toto numerabuntur.

Demonstratio.

A B C D E

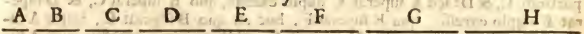
FAcilitatis ergo assumamus aliquam rectam in quinque partes sectam, secundum seriem Arithmeticam; scilicet A, B, C, D, E, igitur B superat A eodem excessu quo E superat D, quare si excessus quo E superat D addatur ipsi A, fiet a cum adjuncto excessu æqualis ipsi B, & similiter E erit æqualis D; unde E cum A æqualis erit D cum B: sed [a] B cum D duplum est ipsius a 1. *hujus*
C, per propositionem primam hujus, igitur etiam A cum E erit duplum C, ac proinde totum aggregatum A, B, C, D, E erit quintuplum ipsius C: sunt autem ex suppositione etiam quinque partes in ipso toto aggregato: Ergo patet veritas propositionis.

PROPOSITIO XI.

SI magnitudo diviſa fuerit ſecundum ſeriem aliquam diſcretæ quantitatis, in partes quæ numero pari conſtent:

Dico totum aggregatum toties continere mediam partem duarum mediarum quantitatum, quot ſunt partes in linea diviſa.

Demonſtratio.



EXpoſita ſit magnitudo in octo partes diviſa ſecundum aliquam ſeriem Arithmeticam, dicit propoſitio numerum partium, qui octo eſt, etiam totum aggregatum explere, per medietatem quantitatum D E octies repetitam; quod ſic patebit. Omnes hæ magnitudines ſunt in ſerie diſcretæ quantitatis; igitur prima & ultima æqualis eſt ſecundæ cum penultima, & ſic conſequenter ſecunda cum penultima æquails eſt tertiæ cum antepenultima, ac conſequenter etiam tertia cum antepenultima æqualis duabus mediis ſimul ſumptis; unde manifeſtum fit medietatem duarum mediarum quantitatum octies ſumptam, complere totam ſeriem octo quantitatum.

PROPOSITIO XII.

SI ponantur duæ æquales lineæ ſectæ, ſecundum ſeries diverſas progreſsionis Arithmeticæ, in partes numero impari, ita tamen ut non diſcrepent numero ſuarum partium;

Dico ſi in utriuſque lineæ ſub diviſione æqualis partium numerus exſtiterit, etiam medias in utraque ſerie ęquales futuras.

Demonſtratio.

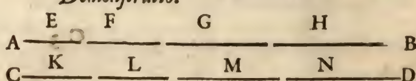
PEr decimam hujus liquet; quod tota linea toties contineat mediam, quot ſunt numero partes, in tota ſerie; igitur cum ſupponantur duæ illæ lineæ æqualem partium numerum continere, ſintque æquales illæ ex ſuppoſitione, etiam utraque toties continebit ſuam mediam, quot ſunt in ſerie utriuſque partes, qui numerus partium cum æqualis ſit, etiam conſtat utraſque medias in ſeriebus illis æquales eſſe.

PROPOSITIO XIII.

QUod ſi binæ lineæ inter ſe æquales, ſecundum diverſam ſeriem progreſſionis Arithmeticæ, diviſę fuerint in quatuor partes:

Dico aggregatum duarum mediarum unius ſeriei æquale eſſe duarum mediarum aggregato alterius ſeriei.

Demonſtratio.



Lineæ

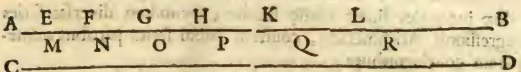
Lineæ A B, C D divisæ sint in quatuor unaquæque partes, secundum diversam progressionem Arithmeticam. Dicit propositio aggregatum duarum mediarum F, G, seriei A B, æquale esse aggregato duarum mediarum L & M, secundæ seriei; quod sic constabit ex proprietatibus progressionis Arithmeticæ. Ex constructione æquales sunt rectæ A B, C D, quare cum [a] tota A B dupla sit, duarum F & G; etiam tota C D dupla est duarum F & G: sed eodem jure tota C D dupla est duarum L & M: igitur sequitur quod duæ F & G æquales sint aggregato L & M. a 7. hujus.

PROPOSITIO XIV.

SI duæ æquales lineæ, secundum diversam seriem alicujus progressionis Arithmeticæ, sectæ fuerint in quotcumque partes numero pares, fuerit autem numerus partium in utraque serie æqualis:

Dico aggregata partium duarum mediarum, in utraque serie æqualia fore.

Demonstratio.



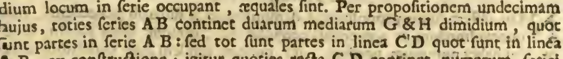
SUpponantur AB, C D æquales lineæ, divisæ secundum duas diversas series progressionis Arithmeticæ, prout sonat propositio, scilicet in partes E, F, G, H, K, L, quæ numero æquales sint cum partibus M, N, O, P, Q, R. Dico igitur quod duæ mediæ, G & H simul sumptæ duabus O & P, quæ medium locum in serie occupant, æquales sint. Per propositionem undecimam hujus, toties series AB continet duarum mediarum G & H dimidium, quot sunt partes in serie A B: sed tot sunt partes in linea CD quot sunt in linea A B, ex constructione; igitur quoties recta C D continet numerum seriei A B, toties etiam continet dimidium duarum mediarum G & H, sed etiam toties continet dimidium duarum mediarum O, P, quoties continet numerum partium suarum, igitur toties continet dimidium suarum partium O, P, linea C D, quoties continet dimidium mediarum G & H, linea A B: æquales autem sunt A B & C D, erunt itaque æqualia dimidia mediarum tam G, H, quam O, P, ac proinde ipsa aggregata. 11. hujus.

PROPOSITIO XV.

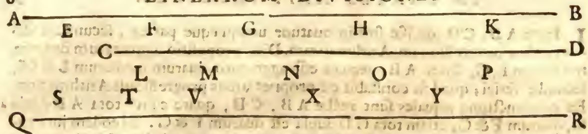
QUod si duæ inæquales lineæ, secundum diversas series Arithmeticæ progressionis, divisæ fuerint, numerusque partium in utraque linea æqualis fuerit, partes vero seriei numero impari:

Dico majorem lineam ad minorem eam obtinere rationem, quæ inter utrasque medias linearum partes reperitur.

Demonstratio.



SInt A B, C D inæquales lineæ divisæ in partes impari numero, ita tamen ut totidem sint partes majoris, quot minoris, scilicet E, F, G, H, K, & L, M, N, O, P:



M, N, O, P: verbi gratia sit utriusque divisionis partium numerus quinarius, assumpta deinde linea QR, quæ sit æqualis AB, dividatur ut ejus partes sint quinque numero & sortiantur eam inter se rationem, quæ reperitur inter partes lineæ CD, erit per propositionem duodecimam hujus, media linea V æqualis mediç G, in partibus rectæ AB: unde evidenter sequitur, quod eandem rationem obtineat linea AB ad mediam G, quam habet recta QR ad lineam V, quç medium situm occupat, inter partes rectæ QR; atqui ex constructione, recta QR, eandem habet rationem ad suam mediam V, quam linea CD ad mediam N. Rectè itaque infertur, quod qualem rationem obtinet AB ad rectam CD talem quoque servat media G ad mediam N: quod demonstrandum fuit.

12. hujus (margin note)

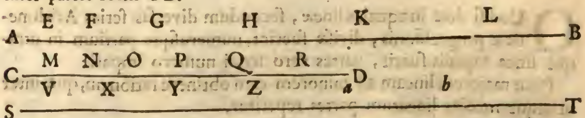
PROPOSITIO XVJ.

SI duæ inçquales lineæ divisç fuerint, secundum diversas series progressionis Arithmeticæ, constent autem series partibus numerum parem continentibus:

Dico majorem lineam ad minorem talem continere rationem, qualem duæ mediç majoris lineæ habent ad duas medias lineæ minoris longitudinis.

Demonstratio.

NOn differt hujus propositionis demonstratio à discursu præcedenti, nam quemadmodum in prçcedenti propositione, utraque linea parem, & æqualem habet numerum partium, ita quoque eandem hæc conditionem requirit. Differt nihilominus, quod præcedens exigat dividi lineas utrimque, in partes numero impares, quæ sint in serie Arithmetica: præsens vero petit lineas, in partes numero pari esse divisas. Ostendendum itaque restat, lineas AB, CD, quæ inæquales sunt magnitudines, & sectæ sunt in partes numero pari, scilicet senas, secundum diversas series alicujus progressionis quantitatis discretæ E, F, G, H, K, L, & M, N, O, P, Q, R, ita esse constitutas ut major AB, ad minorem CD eam obtineat rationem, quam habent duæ mediæ majoris nempe G & H simul sumptæ, ad duas O, P quæ sunt mediæ inter partes rectæ CD.



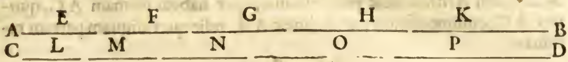
Utemur eodem discursu, qui nobis usui fuit in prioris propositionis demonstratione; assumendo nimirum tertiam aliquam lineam ST, æqualem longitudine cum recta AB, divisam autem sicut est divisa linea minor CD: sint igitur V, X, Y, Z, *a*, *b*, partes lineæ ST, in eadem ratione, qua sunt M, N, O, P, Q, R. Quoniam igitur lineæ AB, ST ex constructione æquales sunt & sectæ eodem numero partium, sequitur per propositionem decimam quartam, aggregata partium duarum mediarum in utraque serie æqualia esse; igitur qualis est ratio totius AB ad duas G, H, talis quoque est

14. hujus (margin note)

rectæ

rectæ S T ad duas Y, Z; sed qualis est ratio S T ad Y, Z simul sumptas, talis quoque est totius C D ad duas O P; igitur qualis est ratio A B ad duas medias G, H, talis quoque est ratio rectæ C D ad duas medias O, P. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XVII.



SI duę æquales lineæ in partes numero impares sectę fuerint, vel pares secundum seriem Arithmeticam:

Dico duas lineas, a media vel ab ipsismet extremis æqualiter distantes, si simul sumantur, in utraque serie æquales esse.

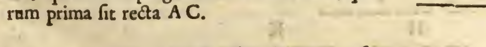
Demonstratio.

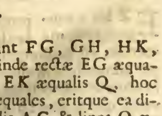
LIneæ A B, C D æquales, primò supponantur divisæ, unaquæque in partes quinas, quæ sint E, F, G, H, K, & L, M, N, O, P, asserit propositio quod E & K, quæ æquali partium numero a media G sunt constitutæ, atque sunt rectæ L & P a media suæ seriei, quæ est N, etiam æquales sint, si simul sumptæ fuerint. Quoniam proportionales sunt F, G, H, ergo F, G, H lineæ [a] triplæ sunt ipsius G, & quia etiam proportionales sunt M, N, O sunt similiter M, N, O, triplæ rectæ N : unde F H duplæ sunt ipsius G sicut M & O duplæ N. Sed etiam [b] æquales sunt G & N, igitur etiam sunt æquales F, G, H lineis M, N, O simul sumptis, quare cum ex constructione æquales quoque sint A B, C D, patet etiam E & K lineis L & P simul sumptis æquales esse. Si media in utrâque serie tollatur, manifesta fiet secunda pars hujus propositionis.

a 1. *hujus*

b 12 *hujus*

PROPOSITIO XVIII.





IN recta A B, assumantur quatuor æquales lineæ A C, C D, D E, E F;

Oporteat rectam A B partiri in quatuor partes, quæ sint in progressione Arithmetica, quarum prima sit recta A C.

Constructio & Demonstratio.

DIvidatur recta F B in sex partes æquales, quæ sint F G, G H, H K, K L, L M, M B. & fiat rectæ E F equalis N, deinde rectæ E G æqualis O, rectæ quoque E H æqualis P, denique lineæ E K æqualis Q, hoc peracto erunt lineis N, O, P, Q, partes lineæ A B æquales, eritque ea divisio ad mentem propositionis. Est enim linea N æqualis A C, & linea O æqualis C D cum F G, linea vero P æqualis D E & simul lineæ G K, ultimò linea Q ęqualis rectæ E F unà cum recta K B, unde cum lineæ N, O, P, Q sint in serie progressionis Arithmeticæ, etiam partes lineæ A B, quę sunt illis ęquales erunt in serie eâdem, quod fuit pręstandum.

D PRO-

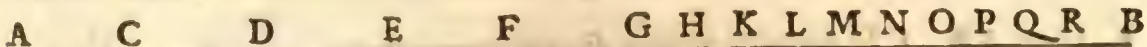
PROPOSITIO XIX.

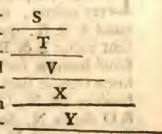


Linea A B utcumque divisa in C, toties dividi potest in seriem aliquam Arithmeticæ progressionis, quæ habeat primam A C, quoties A C, commensurans partes lineæ A B, relinquet aliquam partem residuam.

Demonstratio.

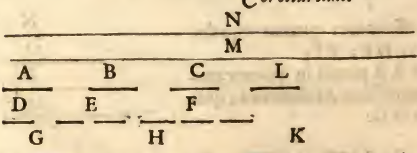
Sumpta recta A C aliquoties, in linea A B, ut libitum fuerit, verbi gratia quinies nempe, A C, C D, D E, E F, F G, relinquat aliquam residuam partem G B, Dico quod A B dividi queat, secundum aliquam seriem progressionis Arithmeticę, quę habeat primam illius seriei lineam A C; quod ita patebit: quoniam per constructionem quinque partes ęquales sunt primę A C, & relicta sit pars residua G B; dividatur G B in tot partes ęquales, ut una illarum addita rectę C D, & duabus ex iisdem adjunctis rectę D E,





tribus quoque annexis lineę E F, denique quatuor residuis additis lineę F G adęquent totá C B, tunc si addatur lineę C B prima AC, erit tota A B secta secundú seriem progressionis Arithmeticę; si enim rectę A C sit ęqualis S, & rectę C D unà cú G H sit ęqualis T, ulterius lineę D E simul cum H L, quę dupla est G H, sit ęqualis V, atque lineę E F unà cum recta L O, quę est tripla rectę G H, ęqualis ponatur X, prętere a rectę F G simul cum O B, quę quadrupla est G H, sit æqualis Y, apparebunt omnes lineę S, T, V, X, Y ęquales toti lineę A B; sunt autem partes S, T, V, X, Y in serie Arithmetica, cum ęquali se excessu superent, igitur etiam tota A B, si dividatur in partes ęquales illis quinque quantitatibus, erit divisa in rationem Arithmeticam quinas habens partes quarum prima erit recta A C.

Corollarium.



Ex his itaque propositionibus rectè colligitur methodus formandi series progressionis Arithmeticę, maximè in ratione minoris inęqualitatis. Momendus est nihilominus lector, quod datis quatuor quantitatibus ęqualibus per admixtionem aliarum partium, in serie aliqua Arithmetica quatuor partium, majoris vel minoris inæqualitatis constitutis, alia series adhiberi possit, a priori diversa, quę admixta partibus illis quatuor ęqualibus aliam seriem Arithmeticam exhibeat etiam quatuor seriei partes complectentem: nam lineis A, B, C, L ęqualibus datis, si secundę B adjungatur D, & rectę C addatur E, ipsi vero L jungatur F exurget series exhibens lineá M. Quod si vero ipsi B conjungatur G, & rectę C addatur H, ultimę quoque L juncta sit K, exsurget linea N, quę non erit ęqualis M. Emer-

Emergent igitur novę ſeries ab illis, quę ſuperius per ſeriem rationis D, E, F emerſerunt, & nihilominus idem omnes habent initium ſuę progreſſionis, unde apparet infinitas ſeries exſurgere poſſe, quę diverſiſſimę ſint inter ſe habentes commune principium. Quod autem dictum eſt, quod linea N non erit ęqualis M, hoc ita non eſt intelligendum, quod per ſimilem ſeriem G, H, K, non poſſit exhiberi ſeries producens quantitatem M. Quod ſi enim linea D, E, F, dividatur, ut eſt diviſa linea G, H, K prodibit eâdem praxi ſuperius poſitâ linea, habens in ſerie ſua initium lineam A & diverſam progreſſionem partium, exhibentem nihilominus lineam M vel N vel quamcumque.

PROPOSITIO XX.

SI quatuor magnitudines ſeriei Arithmeticæ proprietates habeant, aggregatum extremarum, mediarum aggregato æquale erit.

Demonſtratio.

QUoniam prima ſuperat ſecundam, ſicut tertia quartam, additâ igitur differentiâ, quâ prima excedit ſecundam ipſi ſecundę, fiet ſecunda ęqualis primę: ſimiliter ſi addatur differentia, quâ tertia ſuperat quartam, ipſi quartę, erit quarta ęqualis tertię, ergo prima cum quarta cum ſuo additamento ęqualis erit tertię & ſecundę cum ſuo augmento, ſed ſi ab ęqualibus adjuncta ęqualia rurſum demas, reſidua remanebunt ęqualia; igitur prima tunc quantitas cum quarta erit ęqualis ſecundę & tertię. Quod fuit oſtendendum.

PROPOSITIO XXI.

SInt A, B, C, D in ſerie diſcretæ quantitatis, & a ſingulis æquales magnitudines demantur:
Dico reſiduam ſeriem in diſcreta quantitate permanere,

Demonſtratio.

A,	B,	C,	D.
12,	11,	10,	9.
E,	F,	G,	H.
11,	10,	9,	8.

SInt E, F, G, H reſiduę ſeries, igitur A ſuperat B, ſicut E excedit F, & B ſuperat C ſicut F excedit G, & C ipſam D ſicut G ipſam H, igitur ſicut ſunt in diſcreta ſerie A, B, C, D, ita quoque in Arithmetica ſerie exiſtunt E, F, G, H. Quod oſtendere oportuit.

PROPOSITIO XXII.

QUod ſi econtra magnitudinibus in ſerie Arithmetica conſtitutis æquales quantitates adjunxeris, etiam compoſitæ magnitudines in Arithmetica ſerie comparebunt.

Demonstratio.

A,	B,	C,	D.
12,	11,	10,	9.

SUpponantur magnitudines A, B, C, D in Arithmetica serie, igitur æquali se magnitudine superant, quare A addita ipsi D, æqualem exhibet magnitudinem illi, quæ fit ex B additâ ipsi C, unde si æquales illis magnitudines addantur, etiam A & D cum suis additamentis æquales erunt B & C, unà cum suis adjunctis. Quare admissis incrementis permanent in serie Arithmetica.

PARS

LINEARUM
PARS SECUNDA
De proprietate Linearum Geometricè proportionalium;

PROPOSITIO XXIIJ.

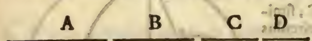


POsitæ ſint tres lineæ, A, B, C, in continua Analogia: Dico lineam totam conſtare ex tripla rectæ A, ſi ſeries ſit minoris inæqualitatis, & exceſſu, quo differt A a linea B, bis ſumpto, denique ex differentiâ, quâ diſtat B a recta C.

Demonſtratio.

FIat rectæ C æqualis DE linea, deinde rectæ A ſit æqualis DF, & rectæ B æqualis DG: igitur DF continet ſemel lineam A, & ſimiliter DG eandem A ſemel continet, quare cum etiam DE ſemel contineat A, manifeſtum eſt in linea ABC tertio rectam A aſſignari; quia vero recta FG exceſſus eſt, quo linea DG, hoc eſt linea B, excedit rectam DF, hoc eſt A, & cum præterea recta DB contineat eandem FG, & ſimul differentiam, quâ differt DG a DE, patet quod etiam linea ABC contineat rectam FG bis, & ſemel exceſſum; quo diſtat recta DG a linea DE, hoc eſt recta B a recta C. Quod oſtendere oportuit.

PROPOSITIO XXIV.



SInt A, B, C, D, proportionales majoris inæqualitatis; Dico rationem rectanguli ſub A & D ad B quadratum fore minoris inæqualitatis.

Demonſtratio.

EX eo quod ex conſtructione ſint proportionales A, B, C, D, ſequitur [a] quod rectangulum ſub A, & D ſit æquale ſub B, & C rectangulo, rectangulum autem ſub B, & C minus eſt quadrato B; igitur etiam rectangulum ſub A, & D quadrato B minus eſt.

a 16. Sexti.

PROPOSITIO XXV.

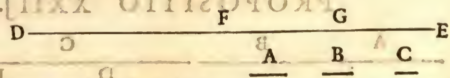
IIſdem permanentibus: Dico rationem rectanguli ſub A & D ad C quadratum eſſe majoris inæqualitatis.

 Demon-

Demonstratio.

a 16 sexti. [a] Rectangulum sub A, & D æquale est B C rectangulo, igitur cum series sit majoris inæqualitatis recta B major est, quam C, igitur quadratum C minus est rectangulo sub B & C ac proinde minus etiam rectangulo sub A & D. Ratio igitur rectanguli sub A & D ad C quadratum est majoris inæqualitatis.

PROPOSITIO XXVI.



Quævis recta nata est posse dividi in tres partes proportionales, secundum datam progressionis seriem.

Demonstratio.

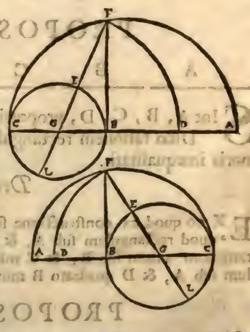
Data sit quævis series A, B, C, & quæcumque linea D E, fiat ut A B C ad A ita D E ad D F, utque A B C ad B, ita D E ad F G. Dico lineam D E divisam esse in punctis F & G, secundum seriem A, B, C. Ut enim est tota A B C ad A, ita est ex constructione tota D E ad D F, [a] igitur ut est A B C ad B C, ita est D E ad F E, est insuper ex constructione ut A B C ad B ita quoque D E ad F G; igitur ut A B C ad A & C, ita D E est ad D F & G E; sed est ut A B C ad A ita D E ad D F, igitur ut A B C ad C, ita est D E ad G E; igitur sunt D F, F G, G E in serie A, B, C.

a ex Elem.

PROPOSITIO XXVII.

Sit A C divisa in B: Oporteat vero alteram partium partiri in D, ut sint proportionales A D, D B & B C.

Constructio & Demonstratio.

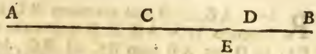


Fiat diametro A C circulus A F C; similiter diametro C B describatur circulus B E C, deinde ex puncto B erigatur perpendicularis B F ad rectam A C, denique ex puncto F per G, centrum circuli B E C, agatur linea F G occurrens circumferentiæ, circuli E B C, in punctis quibusdam E & L;
a 36. tertii. erit igitur [a] rectangulum E F L æquale qua-
b 35. tertii. drato B F, hoc est [b] rectangulo A B C: un-
c 16 sexti. de [c] A B est ad F E, ut est F L ad B C, est autem F L major quam B C; igitur etiam A B major est quam F E, fiat igitur lineæ
d 3. primi. rectæ F G [d] æqualis G D, erit hæc minor quam A G, & consequenter minor erit
e 1. secundi. B D quam B A. [e] Rectangulo A B C æquale est rectangulum sub A D & B C, una
f 3. secundi. cum rectangulo D B C, hoc est F E L: [f] Rectangulo vero B D C, hoc est E F L, æquale est D B C rectangulum, una cum quadrato D B; dempto igitur communi rectangulo D B C, manet D B quadrato æquale rectangulum A D B C,
g 17. sexti. [g] proportionales igitur sunt lineæ A D, D B, B C. Quod fuit præstandum.

Quod non minus de ratione minoris inæqualitatis intelligendum est, quam de ratione majoris inæqualitatis, ut ipsamet docent schemata, in quibus nunc A B major quam B C dividitur ut sint proportionales A D, D B, B C, nunc vero minor A B, eodem modo dividitur, quare universalis prorsus est propositio.

Hanc propositionem demonstravimus l. 2. tom. 1. ubi & aliam universaliorem attulimus. Placuit tamen eam hic repetere, ne quid lectorem remoretur, in contemplatione divisionis linearum in partes Geometricè proportionales.

PROPOSITIO XXVIIJ.

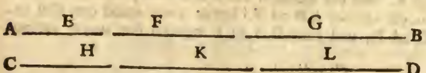


SI recta A E in tres proportionales secta fuerit, quarum prima sit A C: Dico quod non dividetur in alio puncto, quam in solo D, ut sint proportioanales A C, C D, D B.

Demonstratio.

SInt enim, si fieri potest, etiam A C, C E, E B proportionales, igitur a 17. sexti.
a rectangulo A C, E B æquale est quadratum C E. Sed ex suppositione pro- b per eandem.
portionales sunt A C, C D, D B, igitur b quadrato C D æquale est rectangulum A C, D B, est autem rectangulum A C, D B minus rectangulo A C E B. Igitur etiam quadratum C D minus erit quadrato C E; quod fieri nequit, cum ex constructione C E sit minor quam C D. Idem quoque absurdum sequeretur, si assumpta fuerit C E major quam C D.

PROPOSITIO XXIX.



SI duæ æquales lineæ in tres proportionales diversæ seriei, divisæ fuerint:

Dico medias inæquales esse.

Demonstratio.

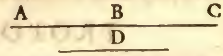
LIneæ A B, C D supponantur divisæ in tres lineas proportionales, ut sint E, F, G, & H, K, L, proportionales. Dico medias F & K inæquales esse, si sint æquales lineæ A B, & C D: nam si essent æquales F & K, & a ex 16. sexti.
nihilominus proportionales existerent E, F, G, & H, K, L, igitur a rectangulum E G esset æquale H L rectangulo; unde E ad H eandem rationem b 25. quinti
haberet, quam L ad G; atqui ex elementis constat, b quod duæ extremæ inter quatuor proportionales lineas, si simul aggregentur majores sint quam aggregatum mediarum; igitur E & G simul sumptæ majores sunt quam H & L, atqui F & K si sint æquales lineæ, F cum duabus lineis E, G, & K cum H L, nequeunt exhibere duas lineas æquales A B & C D; igitur necessariò infertur lineas F & K inæquales esse.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

SIt quævis linea A C divisa in B, & alia quælibet D: Dico rationem A B ad D, unà cum ratione B C ad D, æqualem esse rationi A C ad D.

Demonstratio.



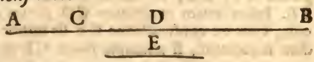
a 1 proportion: tom. 2. lib. 8. ubi & hæc prop: habetur 114.

RAtio[a] A B ad D, ad rationem B C ad D, est ut A B ad B C. Ergo componendo, ratio A B ad D unà cum ratione B C ad D, est ad rationem B C ad D, ut A B cum B C ad B C, hoc est ut A C ad B C; atqui ratio A C ad D est quoque ad rationem B C ad D, ut A C ad B C; ergo rationes A B ad D, & B C ad D simul sumptæ æquales sunt rationi A C ad D: Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXI.

SEcta sit A B in punctis C & D utcumque & alia quævis insecta E: Dico rationem A C ad E cum ratione C D ad E, & cum ratione D B ad E æquari rationi A B, ad E.

Demonstratio.



RAtio A C ad E unà cum ratione C D ad E, est per præcedentem, æqualis rationi A D ad E. Sed per eandem ratio A D ad E, unà cum ratione D B ad E, æqualis est rationi A B ad E. Igitur patet quod tres illæ rationes A C ad E, C D ad E, unà cum D B ad E æquales sint unicæ rationi A B ad E.

Corollarium.

QUod hic dicitur de recta A B in tres partes divisa, intelligendum quoque de eadem in quotvis alias partes secta secundum nucleum discursus positi.

PROPOSITIO XXXII.



SInt A & B lineæ æquales, & C cum D æqualis rectæ E: Dico rationem A ad C unà cum ratione A ad D, æqualem esse rationi B ad E.

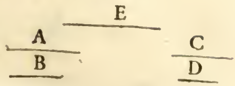
Demonstratio.

PEr propositionem trigesimam hujus, ratio C ad A & ratio D ad A constituunt rationem C D ad A, hoc est E ad B. Ergo convertendo ratio A ad C & ratio A ad D exhibent rationem A ad C D, hoc est B ad E.

PRO-

PROPOSITIO XXXIIJ.

Datæ sint duæ rationes A B, C D: Dico eas inter se eandem habere rationem, quam habet rectangulum A D ad B C rectangulum.



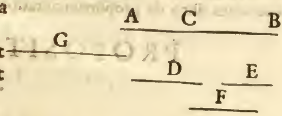
Demonstratio.

Ratio a rectanguli A D ad B C est composita ex ratione A ad B & D ad C. Unde si fiat ut D ad C ita B ad E erit ratio rectanguli A D ad B C rectangulum, ut A ad E. Sed si b fiat ut D ad C ita B ad E, erit quoque ratio A B ad C D ut A ad E, ergo patet veritas hujus propositionis. a 23. sexti b 13. lib. 8. tom. 2.

PROPOSITIO XXXIV.

Sit data A B divisa in C, Et data ratio D ad E:

Oporteat exhibere quadratum F, ut D E rectangulum ad F quadratum sit ut A C ad C B.



Constructio & Demonstratio.

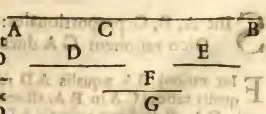
Fiat rationi A C ad C B æqualis ratio D ad G, & inter G & E fiat media F, dico factum quod quæritur. Nam ratio a rectanguli D E ad F quadratum est ut D ad G, hoc est ex constructione ut A C ad C B. a ex præcedent.

PROPOSITIO XXXV.

Si recta A B utcumque secta sit in C, & datâ quâvis ratione D E, fiat ut A C ad C B ita rectangulum D E ad F quadratum; deinde fiat ut E ad F, ita F ad G:

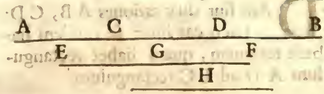
Dico D ad G eandem obtinere rationem quam continet A C ad C B.

Demonstratio.



Rectangulum D E ad F quadratum habet a rationem compositam ex ratione D ad F, & ex ratione E ad F, hoc est ex constructione, ut F ad G: sed ratio D ad G ex iisdem est composita, scilicet ex ratione D ad F & F ad G: igitur rectangulum D E ad quadratum F est ut D ad G, erat autem ex constructione D E rectangulum ad F quadratum, ut A C ad C B; igitur etiam D est ad G ut A C ad C B. a 23. sexti.

PROPOSITIO XXXVJ.

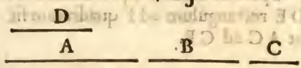


DAta ſit A B, utcumque diviſa in C & D: Oporteat rectam E F dividere in G, ut ratio E G ad G F eadem ſit, cum ratione A C ad C D, ad rationem C D ad D B.

Conſtructio & Demonſtratio.

FIat ut D B ad C D, ita C D ad H; & dividatur recta E F in G ut ſit ratio E G ad G F ut A C ad H, eritque peractum quod requiritur, per ea, quæ docuimus libro de proportionalitatibus tom: 2, prop. 27.

PROPOSITIO XXXVIJ.



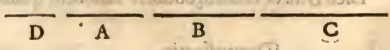
SI ratio A B ad B C fuerit ut A ad D:
Dico rationem A B ad B C, ad rationem A B in B C ductam eandem fore cum ratione C ad D.

Demonſtratio.

a 5. defin. sexti. b 7 pro-port. tom. 2. lib. 8.

Ex ſuppoſitione eſt ratio A B ad B C, ut A ad D: inſuper [a] ratio A B ducta in B C, exhibet rationem A C; igitur ut ratio A B ad B C, ad rationem A B in B C, ita eſt ratio A D ad A C rationem, ſed ratio [b] A D ad A C eſt ut C ad D, igitur patet veritas propoſitionis.

PROPOSITIO XXXVIII.

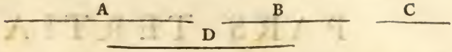


SInt A, B, C proportionales:
Dico rationem C A ductam in B A, eſſe triplicatam B A.

FIat rationi B A æqualis A D ratio, erit ergo ratio C A ducta in A D, æqualis rationi C A in B A; eſt autem ratio C A duplicata rationis B A igitur ratio C A eſt duplicata rationis A D, igitur ratio C D, hoc eſt C A, ducta in B A, eſt triplicata rationis B A. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.



SI A, B, C proportionales fuerint, & linea D media inter A & B: Dico rationem D C triplicatam esse A D.

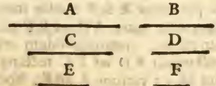
Demonstratio.

RAtio A C componitur ex rationibus A D, D B, & B C, est autem ratio A B duplicata rationis A D, quemadmodum est & ratio B C, igitur ratio A C est quadruplicata rationis A D, sed rationis D B triplicata est ratio D C, igitur etiam ratio D C triplicata est rationis A D.

PROPOSITIO XL.

SIt ratio A B triplicata C D, vel E F in quibusvis terminis minoribus vel majoribus:

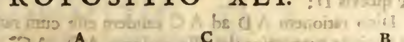
Dico rationem A C in D B, aut A E in F B duplicatam esse rationis C D, vel E F.



Demonstratio.

RAtio A B componitur ex ratione A C in C D, & C D in D B, sed ratio A B ex constructione triplicata est rationis C D, igitur ratio A C in C D & C D in D B est triplicata rationis C D; demptâ igitur ratione C D, remanet ratio A C in D B duplicata rationis D B; qui discursus quoniam etiam congruit rationi E F, patet rationem A C in D B vel A E in F B duplicatam esse rationis C D vel E F.

PROPOSITIO XLI.



SI ratio A B triplicata fuerit A C:

Dico rationem A B ad B C esse quintuplicatam rationis ejusdem A C.

Demonstratio.

RAtio A B ad B C eadem est [a] cum ratione rectanguli A C ad B quadratum, ratio autem rectanguli A C ad B quadratum, composita est ex ratione A ad B, hoc est triplicatâ rationis A C, & ex ratione C ad B, quæ cum duplicata sit rationis A C manifestum est rationem A B ad A C quadruplicatam esse rationis A C.

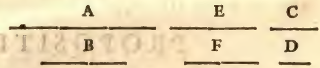
[a] ex 33. hujus

LINEARUM
PARS TERTIA

Rationum proportionalium proprietates considerat, tum ad rationes divisas, & in invicem ductas progreditur.

PROPOSITIO XLII.

INter datas duas rationes mediam exhibere, quæ cum datis sit in continua Analogia.



Demonstratio.

DAtæ sunt rationes A B, & C D, inter quas mediam proportionalem rationem oporteat exhibere: sint primò rationes majoris inæqualitatis, & ponantur E & F mediæ inter A & C, & B & D; eritque [a] ratio E F requi-
a ex 145. proportion: tom.2.lib.8. sita: nam ratio A B ad E F eadem est cum ratione rectanguli A F ad B E rectangulum, quemadmodum etiam ratio E F ad C D eadem est cum ratione rectanguli E D ad F C rectangulum; sed ratio rectanguli A F ad B E composita est ex ratione A ad E., hoc est E ad C, & ex ratione B ad F, hoc est F ad D: cum igitur ratio rectanguli E D ad F C ex ijsdem composita sit, scilicet ex ratione E ad C, hoc est A ad E, & F ad D; hoc est B ad F, manifestum est rationem E F esse mediam inter rationes A B & C D. Quod si tamen ratio A B fuerit minoris inæqualitatis, & ratio C D minoris, modo servetur constructio præscripta, prodibit media ut prius; patet ex vi demonstrationis.

PROPOSITIO XLIIJ.

INter A & B constituatur media proportionalis C, assumaturque quævis D:

Dico rationem A D ad A C eandem esse cum ratione C B ad D B, ac proinde proportionales esse rationes A D, A C, D B.



Demonstratio.

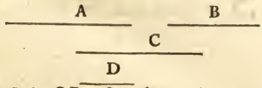
RAtiones A D & A C commune nactæ sunt antecedens, igitur A D ratio
a 7. proportion: tom. 2. lib. 8. b 2. ejusdē. [a] est ad rationem A C, ut C ad D, quia vero rationes C B & D B commune habent [b] consequens B, fit ut etiam ratio C B ad D B, sit ut C ad D, igitur ratio A D est ad rationem A C, ut ratio C B, hoc est A C, ad D B. Proportionales itaque sunt rationes A D, A C, D B.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

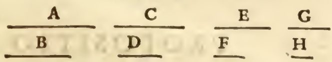
INter lineas A & B ponantur quævis lineæ C, D:
Dico rationes A C, A D cum rationibus D B, & C B proportionales esse.

Demonstratio.



RAtio A B composita est ex ratione A C in C B, & eadem ratio composita est, ex ratione A D in D B. Quare eandem exhibent rationem rationes A C, C B in se ductæ, quam producunt rationes A D, & D B in se ductæ. Proportionales igitur sunt quatuor illæ rationes, hoc est ratio A C est ad A D sicut D B ratio est ad rationem C B: Quod fuit demonstrandum.

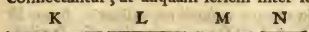
PROPOSITIO XLV.



DAtam seriem qualemcumque rationum proportionalium, A B, C D, E F & G H reducere ad seriem ordinatam suorum Denominatorum.

Constructio & Demonstratio.

QUoniam series nonnunquam exhibentur cum suis antecedentibus, & consequentibus liberis, in magnitudinibus modo majoribus, modo minoribus; operæpretium duxi paucis exhibere praxim, quâ tales rationes inter se connectantur, ut aliquam seriem inter se connexæ forment. Fiat ut ratio A B

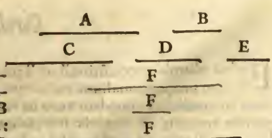


ad C D ita K ad L, utque ratio C D ad E F, ita L ad M, & sicut E F ratio est ad rationem G H, ita sit M ad N; erit tota illa series rationum reducta ad seriem quatuor linearum K, L, M, N, quæ etiam loco denominatorum assumi poterunt totius seriei. Patet ex dictis in proëmio de denominatoribus rationum.

PROPOSITIO XLVI.

OMnis ratio media proportionalis esse potest, inter infinitas duas rationes.

Demonstratio.



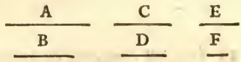
Exhibeatur quævis ratio A B, cui similes fiant rationes C D, D E, & assumatur quæcumque F. Dico rationem A B esse mediam inter rationes C F, & F E: a sunt enim rationes C F, C D, F E proportionales; igitur ratio A B media est inter rationes C F, & F E, sive recta F major fuerit quam C, sive minor: igitur manifestum est quamvis rationem posse mediam esse inter infinitas duas rationes, non mi-

a 43 hujus.

nus atque contingit in communi Geometria de quavis linea recta, cui competit, ut constitui possit media inter infinitas duas alias rectas lineas.

PROPOSITIO XLVIJ.

SI tres rationes proportionales fuerint, nunquam maxima trium erit duplicata secundæ, si omnes sint majoris vel minoris inæqualitatis.

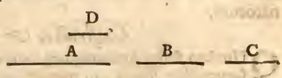


Demonstratio.

RAtiones A B, C D, E F supponantur esse in serie proportionali; oportet ostendere rationem maximam inter eas nunquam fore mediç rationis duplicatam. Cum enim sint rationes proportionales, igitur prima ducta in tertiam est duplicata secundç, quç in se ducta æqualis est primç in tertiam; ergo prima nunquam erit duplicata mediæ.

PROPOSITIO XLVIIJ.

OPortet autem tres rationes proportionales exhibere, quarum prima sit major quam ut sit duplicata secundæ.



Constructio & Demonstratio.

SInt A, B, C lineç proportionales in ratione majoris inçqualitatis, sitque D
a 1. Prop: minor quam C: Dico rationes A D, A B, D C proportionales esse, & nihil-
tom.2.l.8. ominus rationem A D majorem esse, quam ut sit duplicata rationis A B; quod
b 2. Prop: sic demonstrabitur: [a] Ratio A D ad A B, est ut B ad D, & [b] B C ad D C rationem,
tom.l.8. est ut B ad D, igitur ratio A D ad A B eadem est cum ratione B C, hoc est A B ad D C; sunt igitur proportionales rationes A D, A B, & D C. Est autem ex constructione ratio A D major quam ratio A C, & ratio A C duplicata est rationis A B, igitur ratio A D major est duplicata A B, quç media est inter rationes A D & D C.

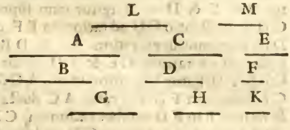
Corollarium.

EX his ultimis propositionibus liquidò apparet, rationum diversitas, quoad seriem proportionalium rationum, quçdam enim series sunt in serie majoris inçqualitatis; quçdam vero in serie minoris inçqualitatis, nonnullæ etiam partim majoris & minoris inçqualitatis, unde dum formatur non raro de illis generalis regula, ad has distinctiones recurrendum est, quemadmodum in duabus his propositionibus contingere apparet, quarum una alteram destrueret, nisi ad similes animadversiones recursus fieret.

PRO-

PROPOSITIO XLIX.

SI tres rationes proportionales fuerint, etiam earum denominatores proportionales erunt.



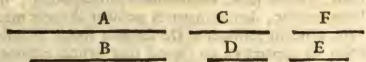
Demonſtratio.

POnantur tres rationes in continua Analogia A B, C D, E F; Dico etiam illarum denominatores eſſe in continuâ ſerie: [a] ratio enim A B ad C D eſt æqualis rationi, quam habet rectangulum A D ad B C rectangulum, quæ eſt ratio A C ducta in D B. Fiat igitur ut D ad B ita C ad L, [b] erit ratio A B ad C D, ut A ad L. Sit igitur ut A ad L ita G ad H, ut ſit ratio A B ad C D, ut G ad H. Deinde quia ratio C D ad E F, eadem eſt cum ratione rectanguli C F ad D E, quæ compoſita eſt ex ratione C E ducta in F D, ſi fiat ut F ad D, ita E ad M erit ratio C D ad E F, ut C ad M; fiat denique ut C ad M ita H ad K; erunt G, H, & K lineæ proportionales, nam ratio rectanguli A D ad C D eſt æqualis rationi G ad H. Sed ratio A B ad C D perhibetur æqualis rationi C D ad E F, igitur etiam ratio C D ad E F æqualis eſt rationi G ad H: ſed oſtenſum eſt, quod etiam rationi C D ad E F æqualis ſit ratio H ad K, igitur ratio G ad H æqualis eſt rationi H ad K; ac proinde tres illæ lineæ ſunt proportionales. Verum tres illæ lineæ oſtendunt, qualis ſit ratio inter illas tres rationes A B, C D, E F; igitur conſtat denominatores illarum rationum etiam in continua eſſe analogia. Quod fuit demonſtrandum.

a 33. *hujus.*
b 13. *lib.* 8. *tom.* 2.

PROPOSITIO L.

IN quavis ſerie rationum proportionalium, ſingulæ rationes ab invicem diſcrepant eodem rationis intervallo.



Demonſtratio.

ETſi veritas hujus propoſitionis prorſus univerſalis ſit, & variæ ſint progreſſiones rationum, quæ exiſtunt in aliqua ſerie proportionali, præſertim ubi rationes majoris vel minoris inæqualitatis in eadem ſerie concurrunt, quia tamen ſimiles ſeries ita neceſſariæ non ſunt, ut intentioni noſtræ ſine illis nam poſſimis ſatisfacere, ſolummodo hac propoſitione intendimus oſtendere de ſeriebus, quæ ſunt in continua progreſſione vel majoris vel minoris inæqualitatis. Aſſumantur igitur tres rationes proportionales majoris inæqualitatis A B, C D, E F, quos oporteat oſtendere eodem rationis intervallo ſeſe invicem excedere, hoc eſt primam a ſecunda non differre, niſi eadem ratione qua diſtat ſecunda a tertia. Ratio [a] A B eſt ad rationem C D ut rectangulum A D ad B C rectangulum, & ratio C D eſt ad rationem E F ut rectangulum C F

a 33. *hujus.*

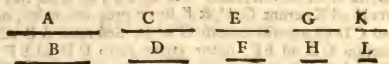
ad

ad D E rectangulum, ſed quo intervallo rationis diſtat rectangulum A D a rectangulo B C, eodem diſtat rectangulum C F a rectangulo D E. Ergo quo intervallo rationis differt ratio A B a ratione C D, eâdem rationis diſtantiâ diſtat ratio C D a ratione E F, igitur cum ſubſumpti veritas needum pateat, demonſtranda reſtat. Ratio [b] rectanguli A D ad B C compoſita eſt ex ratione A ad C & D ad B, igitur cum ſupponatur quod ratio A B ſit ad rationem C D ſicut eſt ratio C D ad rationem E F, etiam ratio rectanguli C F ad rectangulũ D E, componitur ex ratione A C & D B. Sed ratio rectanguli C F ad D E compoſita eſt ex ratione C E & F D; igitur ratio A C & D B eadem eſt cum ratione C E & F D; igitur quâ ratione ratio A C ſuperat D B, eâdem ratione ſuperat ratio C E rationem F D, ſed ratio A C ducta in D B exhibet rationem A B ad C D, & ratio C E in F D exhibet rationem C D ad E F: igitur qua differentia rationis diſtat ratio A B a ratione C D, eâdem diſtat ratio C D a ratione E F: Quod demonſtrandum fuit.

[b] 23. *ſexti.*

PROPOSITIO LI.

SI ſeries quotcumque rationum proportionalium, majoris inæqualitatis, duas rationes primas inæquales habuerit: Dico omnes illius ſeriei rationes inter ſe inæquales eſſe.



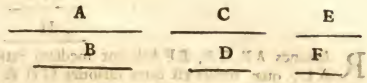
Demonſtratio.

Exhibeatur quæcumque ſeries rationum majoris inæqualitatis A B, C D, E F, G H, K L, in continua analogia exiſtentium (quæ enim proportionales non ſunt in una eademque ſerie non ſunt) ſint autem ſecundum tenorem propoſitionis diſſimiles rationes A B & C D, & quidem majoris inæqualitatis. Dico omnes rationes inter ſe diverſas eſſe: Quod ſic conſtabit. Series rationum proportionalium in duplici ſunt ſpecie; prima conſtat rationibus omnino æqualibus, altera inæqualibus: illa autem, quæ conſtat rationibus æqualibus, gaudet ſerie, denominatorum æqualium, quæ vero rationibus inæqualibus conſtat, denominatores poſtulat diverſæ magnitudinis, licet inter ſe ſervent eandem rationem. De ſecunda ſpecie progreſſionis agit præſens propoſitio, ut apparet ex eo, quod duæ primæ rationes, datæ ſeriei, ſupponantur diverſæ. Aſſumamus igitur aliquam ſeriem A B, C D, E F, G H, K L, quarum primæ duæ ſint inæquales igitur in ſerie primarum trium A B, C D, E F ſi prima in tertiam multiplicetur, prodibit ratio quæ ſit duplicata ſecundæ C D. Cum igitur rationes A B, C D inæquales ſint & A B major quam ratio C D, igitur etiam ratio C D major eſt, quam ratio E F, alioquin ratio A B ducta in E F non eſſet æqualis B C in ſe ductæ, unde patet tres illas rationes eſſe inæquales; atqui ſimili diſcurſu infertur, etiam rationes C D, E F, G H inæquales eſſe, uti & rationes E F, G H, K L: igitur rectè pronuntiavit propoſitio omnes illas rationes inæquales eſſe, quotquot ſunt in illa ſerie. Quod demonſtrandum fuit.

PRO-

PROPOSITIO LII.

SInt proportionales rationes A B, C D, E F:
Dico omnes simul sumptas esse triplicatas medię.



Demonstratio.

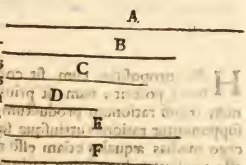
RAtio A B ducta in E F est duplicata C D, nam est æqualis rationi C D ductæ in se; igitur si addatur rationi A B in E F, ratio C D, apparebit ratio triplicata rationis C D.

PROPOSITIO LIII.

SInt tres rationes A B, C D, E F æquemultiplicatæ, hoc est sit ratio A B toties multiplicata C D, quoties ratio C D est multiplicata E F:

Dico tres has rationes non esse proportionales:

Demonstratio.

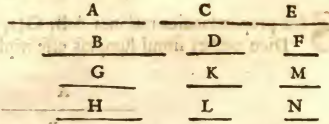


POnatur exempli gratia, ratio A B duplicata C D, & ratio C D duplicata E F; Oportet igitur demonstrare has tres rationes nullatenus esse proportionales. Quoniam enim ratio A B est duplicata C D, igitur ratio A B ducta in C D exhibebit triplicatam C D: & similiter ratio C D ducta in rationem E F, exhibebit triplicatam E F; unde sequitur, quod omnes illæ rationes producant aliquam rationem, quæ sit septuplicata E F, & similiter septuplicata illius rationis, cujus ratio C D tantum est duplicata: patet autem ex præcedenti propositione, quod tres rationes proportionales simul multiplicatæ exhibeant rationem, quæ est triplicata mediæ; cum igitur ex suppositione ratio A B sit duplicata C D, igitur A B ducta in C D exhibet rationem triplicatam C D, unde si ducatur ratio triplicata rationis C D in rationem E F, prodibit ratio major triplicatâ C D: nequeunt igitur tres illæ rationes esse proportionales.

PROPOSITIO LIV.

SI duę series trium rationum medias rationes habuerint æquales; Dico utrasque series ęquales esse.

Demonstratio.



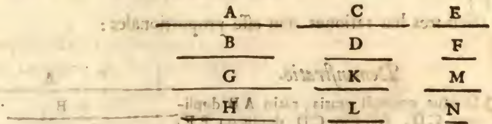
RAtiones AB, CD, EF habeant mediam rationem CD æqualem rationi KL, quæ media est inter rationes GH & MN, oportet demonstrare quod series trium rationum AB, CD, EF, æqualis sit toti seriei trium ratio-
a 52. hujus. num GH, KL, MN: Quod ita demonstro. Ostensum est, a quod aggregatum trium rationum, sive ratio, quæ emergit ex omnibus his rationibus in se ductis, sit triplicata rationis mediæ CD, hoc est KL; sed etiam ratio, ex rationum GH, KL, MN in se multiplicatione resultans, est triplicata rationis KL, hoc est CD; igitur patet veritas propositionis.

PROPOSITIO LV.

SI duę series trium proportionalium rationum, æqualem rationem produxerint;

Dico medias rationes in utraque serie ęquales esse.

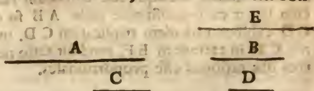
Demonstratio.



a 52. hujus. HÆc propositio cum sit conversa præcedentis, eodem discursu demonstrari poterit; nam ut prius dictum est, a aggregatum per multiplicationem trium rationum productum exhibet rationem, quæ est triplicata mediæ, supponuntur rationes utriusque seriei in se ductæ producere æquales rationes; ergo medias æquales etiam esse necesse est, nam duæ eædem rationes nequeunt esse triplicatæ diversarum rationum.

PROPOSITIO LVJ.

DAtam rationem AB partiri in duas rationes, datam rationem continentes C ad D.



Constructio & Demonstratio.

a 34. hujus FIat ut a rectangulum AC ad AD rectangulum, ita rectangulum AB ad E quadratum; igitur b quoniam ratio A ad D ad rationem A ad C est ut
b 7. propor. C ad D, erit c quoque ratio rectanguli AC ad rectangulum AD, ut C ad D,
tom. 2. l. 8. ac proinde etiam rectangulum AB ad E quadratum, ut C ad D. Igitur ratio
c 33. hujus. AE est ad EB ut C ad D, & consequenter ratio AB divisa est in duas rationes, datam rationem continentes C ad D

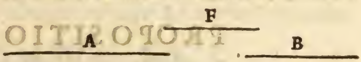
Scho-

Scholion.

UNiversalis est hæc praxis pro omni divisione alicujus rationis in duas partes sub ratione data, atque adeo etiam inservit rationi bifariam dividendæ, nam si ratio A B *in duas rationes postuletur dividi, quæ denominatores æquales habeant, tunc etiam rectangulum* A B *ad quadratum* E *haberet rationem æqualitatis, & consequenter exhibendo mediam* E *proportionalem inter* A *&* B*, esset ratio* A B *divisa in duas æquales partes: quinimo etiam sectio alicujus rationis, in quatuor partes æquales, ab hac propositione dependet; nam si quædam ratio postuletur dividi in quatuor æquales rationes, si per hanc propositionem primo bisecta fuerit in duas æquales rationes, atque hæ duæ similiter per eandem bisectæ fuerint, resultabunt rationes quatuor, quæ inter se æquales erunt, ac proinde minimè est necessarium propriam propositionem exhibere, quæ divisioni inserviat, quâ dicta ratio quadrifariam doceatur dividi. Non agimus hoc loco de divisione in tres partes, sive proportionales sive æquales, sed de illa copiosius agetur, cum de universali Mesolabio mentio fiet. Quia vero præcedens propositio, etsi omnino universalis sit, nihilominus aliquibus possit videri solis divisionibus convenire, quæ rationis datæ partes tales exhibeat, quarum singulæ minores sint ipsâ totâ ratione cujus sunt partes, hinc particulares hac de re propositiones assignabimus, quæ talibus casibus explicandis & percipiendis inserviant, ac proinde aliquid ulterioris lucis materiæ rationum, hucusque in Geometricis satis incognitæ, addant.*

PROPOSITIO LVIJ.

DAtam rationem A B majoris inæqualitatis, in duas rationes dividere, quarum prima ad secundam habeat majorem rationem quam A ad B.

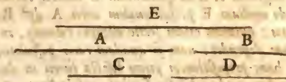


Demonstratio.

VIdetur difficile, immo factu impossibile, ut ratio A B dividi possit in duas rationes, quarum una major sit tota latitudine rationis A B dividendæ, cum omnibus sit persuasum aliquod totum non posse constare aliqua parte, quæ sit ipso toto major, cujus est pars. Cessabit admiratio, ubi patebit veritas. Detur secundum mentem propositionis ratio majoris inæqualitatis A B, quam dividat recta F minor quam B. Dico rationem A B divisam esse per rectam F in duas rationes, nempe A F & F B, & rationem A F nihilominus majorem esse, quam sit ratio A B. Quod sic demonstro: quod ratio A F major existat ratione A B constat ex ipsa constructione per octavam quinti Euclidis; atqui ratio A B composita est ex ratione A F & F B, igitur partes rationis in quas resolvitur ratio A B tales sunt, ut prima major sit quam ipsamet ratio dividenda A B. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LVIII.

OPortet rationem majoris inæqualitatis dividere in duas rationes, quarum una sit minoris altera majoris inæqualitatis.



Constructio & Demonstratio.

DAta sit ratio majoris inæqualitatis A B dividenda per rationes duas, quarum una sit minoris, altera vero majoris inæqualitatis: sit aliqua ratio C D minor quam ratio B A, & fiat ut C ad D ita B ad E. Dico rationem A B divisam esse in rationes duas, A E, E B, quarum prima est minoris inæqualitatis, & secunda majoris; cum enim sit D major quam C ex constructione, & B ad E sicut C ad D, erit B minor quam E, sed etiam ratio C D hoc est B E minor est quam B A; igitur [a] A est minor quam E; est au-
a 8.*quinti.* tem ratio A B composita ex ratione A E & E B; igitur ratio A B est divisa per E in duas rationes, quarum prima est minoris inæqualitatis, secunda vero majoris.

Ut autem paucis sensum meum explicem, quoties aliqua ratio A B majoris inæqualitatis assignatur dividenda, si collocetur terminus E minor quam B inter A & B, tunc apparebit ratio A B constare duabus rationibus, quarũ prima erit majoris inæqualitatis, & quidem major quam sit ratio A B: quodsi autem terminus E fuerit major quam ipsamet A linea, tunc resolvitur ratio A B in duas rationes, quarum prima est minoris, altera vero majoris inæqualitatis.

PROPOSITIO LIX.

NUlla ratio bifariam dividi potest nisi mediante linea, cujus quadratum est æquale rectangulo sub terminis rationis dividendæ.

Demonstratio.

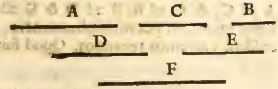
OMnis ratio, quæ bifariam dividitur exhibet duas rationes æquales, sed non potest æqualitas rationum per terminos tres exhiberi, nisi habeatur
a 16.*sexti.* linea, quæ sit media proportionalis inter terminos rationis dividendæ: [a] quadratum autem illius lineæ æquale est rectangulo sub terminis dividendæ rationis; Igitur manifesta est veritas propositionis.

PROPOSITIO LX.

RAtio A B divisa sit utcumque per rectam C in duas rationes, quarum denominatores sint D, E:

Dico: quod per nullam aliam lineam F dividetur ratio A B, secundum rationem D ad E.

Demon-



Demonſtratio.

SUpponitur ratio A B per C diviſa in rationes A C, C B, quarum denominatores obtinent rationem D E, igitur ª rectangulum A B ad C quadratum, eſt ut denominator D ad denominatorem E. Unde ſi per aliam rectam F diviſa eſſet ratio A B, ut rationes A F, F B exhiberent rationem D ad E, etiam rectangulum A B ad F quadratum, eſſet in ratione D ad E, unde quadratum F eſſet æquale quadrato C, quod eſſet contra ſuppoſitum. ª 33. *hujus.*

PROPOSITIO LXI.

DIviſa ſit utcumque ratio A B per lineam C:
Dico rationem A C ad C B, eandem eſſe cum ratione B C ad C A.



Demonſtratio.

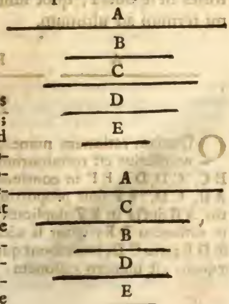
RAtio A C ad C B eſt ut ª rectangulum A B ad quadratum C, ratio quoque B C ad C A eſt eadem cum ratione rectanguli B A ad C quadratum; ergo etiam ratio A C ad C B eſt ut ratio B C ad C A rationem, cum ratio rectanguli A B ad C quadratum, ſit eadem cum ratione rectanguli B A ad idem C quadratum. ª *ex eadē.*

PROPOSITIO LXII.

SInt magnitudines A, B, C, D, E:
Dico rationem A E æqualem eſſe rationi, quæ reſultat ex intermediarum quomodocumque cum extremis multiplicatione, dummodo A & E termini extremi permaneant.

Demonſtratio.

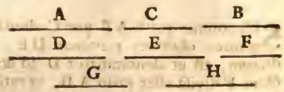
QUod ratio A ad E compoſita ſit ex rationibus A B, B C, C D, D E conſtat ex elementis; ſed intentum propoſitionis eſt oſtendere, quod ſimiliter eadem ratio A ad E producatur, quomodocumque aſſumantur intermedij termini: ponantur enim ipſi termini ita ut primus ſit A, ſecundus C, qui fuit ante tertius; deinde ſuccedat B, qui prius erat ſecundus; ulterius D, qui ante fuerat quartus, maneat quartus; denique ultimo loco conſtituatur E. Tunc ex elementis etjam conſtabit eodem jure, quo in priore ordine, quod ratio A ad E componatur ex ratione



 A ad

A ad C, & C ad B, B ad D & D ad E. Ergo ordo terminorum in compositione rationum per multiplicationem, non inducit novam rationem inter duos eosdem extremos terminos. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXIIJ.



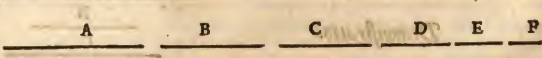
Ratio AB divisa in rationes AC, CB, si in seipsam ducta fuerit, producet rationem duplicatam A ad C, & duplicatam C ad B.

Demonstratio.

Fiat rationi AB æqualis ratio DE, similiter eidem rationi AB sit æqualis EF, deinde fiat ut A ad C ita D ad G, utque C ad B ita E ad H: cum itaque ratio DE composita sit ex ratione D ad G, hoc est A ad C, & G ad E, hoc est C ad B: igitur ratio D ad G ducta in rationem G ad E exhibet rationem A ad B; & simili discursu infertur quod etiam ratio E ad H ducta in rationem H ad F, hoc est ratio AC in CB, proferat rationem EF, quæ cum ex constructione sit æqualis rationi DE, hoc est AB, patet quod ratio DF (quæ componitur ex rationibus D ad E & E ad F, hoc est ex duplicata AB) producat rationem duplicatam AC & duplicatam CB, eo quod tam ratio DG sit æqualis rationi EH, hoc est AC, quam ratio GE æqualis HF, hoc est CB.

PROPOSITIO LXIV.

In omni serie linearum proportionalium, numero impari constitutarum per lineas, quæ rationes seriei connectunt, ratio media toties in se ducta, quot sunt numero rationes, producit rationem primi termini ad ultimum.



Demonstratio.

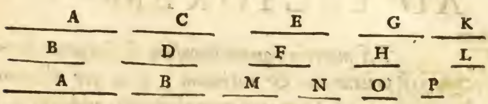
Quoniam rationum numerus supponitur impar in rationibus concatenatis, necessarius est terminorum numerus par: sint igitur quinque rationes AB, BC, CD, DE, EF in continua analogia, media vero sit CD, igitur rationes AB, CD, EF sunt proportionales uti & rationes BC, CD, DE; Igitur ratio AB ducta in EF duplicata est rationis CD, sicut etiam ratio BC ducta in rationem DE; igitur si addatur rationi AB in EF unà cum ratione BC in DE ratio CD, resultabunt quinque rationes æquales rationi CD, qui numerus æqualis est numero rationum, in quas divisa est ratio AF.

PRO-

PROPOSITIO LXV.

SInt rationes non concatenatæ, impari numero in eadem ſerie ejuſdem progreſſionis:

Dico; ſi reducantur ad concatenatas, rationem mediam toties in ſe ductam, quot ſunt numero rationes, producere rationem primi termini ad ultimum.

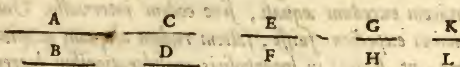


Demonſtratio.

SInt quinque rationes AB, CD, EF, GH, KL in continuâ analogia, fiat autem ut C ad D, ita B conſequens primæ rationis ad M, & ut E ad F ita M ad N, ut G ad H ita N ad O, deniqne ut K ad L ita O ad P; erunt rationes AB, CD, EF &c. reductæ ad rationes concatenatas, id eſt, terminos communes habentes, habent enim rationes AB & BC terminum communem B, & rationes BM, & MN terminum communem M, & MN & NO terminum communem N, denique rationes NO & OP terminum communem habent O, eſtque ratio BM eadem cum ratione CD, ex conſtructione, & ratio MN eadem cum ratione EF, & NO eadem cum GH, denique OP eadem cum KL ratione: cum igitur quinque rationes non concatenatæ, reductæ ſint ad quinque concatenatas, numerus terminorum quinque illarum rationum par erit: unde patet eundem hic diſcurſum ſervandum, qui in propoſitione præcedenti, ut demonſtretur rationem MN quinies in ſe ductam æqualem eſſe rationi AP.

PROPOSITIO LXVJ.

IN quavis rationum proportionalium majoris vel minoris inæqualitatis ſerie, ratio prima ducta in ultimam æquatur rationibus inter ſe multiplicatis, quæ æquali intervallo ab extremis diſtant.



Demonſtratio.

SEries proportionalium rationum vel conſiſtit in progreſſione, quæ numerum rationum parem complectitur, vel quæ earundem rationum numerũ imparem requirit, verum unâ benè perſpectâ, patebit altera. Conſtituantur igitur rationes primò cotinentes imparem ſeriem, quæ ſit AB, CD, EF, GH, KL; igitur cum omnes ſupponantur proportionales, etiam tres mediæ rationes inter ſe proportionales erunt, unde ratio CD in GH ducta, æqualem exhibet rationem illi, quæ ex ductu mediæ in ſe ipſam reſultat. Quia ulterius omnes rationes ſupponuntur proportionales, igitur ut AB ratio eſt ad rationem EF, ita eſt ratio EF ad KL, ac proinde ut ratio, AB eſt ad CD ita eſt ratio GH, ad KL, igitur ratio AB in KL ducta, æqualis eſt rationi EF ductæ in ſe: quæ argumentandi ratio, cum adhiberi queat etiam rationibus numero pari conſtantibus, liquet propoſitionis veritatem eſſe prorſus univerſalem.

AD

AD LECTOREM.

ETsi materia, quam hucusque de linearum proprietatibus & rationum, quas per illarum inter se Comparationem elicuimus, videatur non satis ad Mesolabij doctrinam prima fronte conducere: rogo te, benigne Lector, tamdiu suspendere judicium digneris, donec ad Hyperbolicas considerationes gressum faciamus. Illic enim apparebit omnem hunc tractatum, si non prorsus necessarium, saltem oportunum fuisse, ad divisiones segmentorum Hyperbolicorum, de quibus illo loco fit mentio, intelligendas: nam partes segmentorum Hyperbolicorum, quæ sunt in continua analogia, leges observant de quibus hoc tractatu doctrinam præmittimus; omnes enim partes proportionales, in quas divisum est aliquod segmentum hyperbolicum, ut docuimus tomo 2. tam sunt inter se multiplices quam rationes terminorum, quibus clauduntur, sunt multiplicatæ inter se. Cum vero rationes terminorum quibus segmenta continentur sunt in continua analogia, tunc ipsæ partes illius segmenti sese invicem excedunt æquali, sive eodem intervallo. Unde judicavi omnino expediens fuisse, saltem rudem aliquam notitiam præmittere, ut si quis in hyperbolicis considerationibus hærere cogatur, recursum habeat ad doctrinam hoc libro explicatam, ut facilius ea percipiat, quæ discursu in fine tomi, hujus satis inusitato, adferuntur.

LIBER SECUNDUS DE FIGURIS TRIANGULARIBUS

ARGUMENTUM.

Continet hic Liber partes quatuor, quarum

Prima triangula basi, lineas æquidistantes habentia considerat.

Secunda vero versatur circa triangula similia, lineas proportionales in illis ductas, & rationes similes tam linearum quam rectangulorum.

Tertia angulorum bisectiones, rationes tum proportionales, tum in se ductas, ac denique proportiones simplices in medium adducit.

Quarta earum linearum proprietates complectitur, quæ in triangulo Isoscelio bisecto, ducuntur.

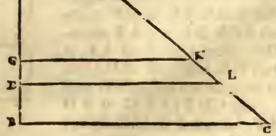
PARS PRIMA.

De Triangulis basi æquidistantes lineas habentibus, eorumque Proprietatibus.

PROPOSITIO PRIMA.

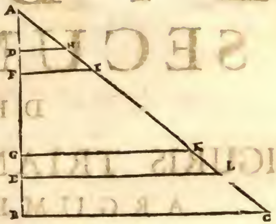
IN triangulo ABC sumantur æquales lineæ AD, BE, & AF, BG; ponantur deinde rectæ DH, FI, GK, EL, quæ æquidistent basi BC:

Dico rectas DH, EL simul sumptas, æquari rectis FI, GK simul sumptis.



Demon-

Demonstratio.



DUcantur ex H & K rectæ H M, K N parallelæ A B. Quia igitur recta A F æqualis est lineæ B G, uti & A D æqualis B E, si auferantur æquales A D & B E ex A F & B G, remanebit recta D F æqualis G E, & consequenter erunt rectæ H M, K N æquales. Propter similitudinem autem triangulorum H M I, K N L, ut H M ad K N, ita M I est ad N L; cum itaque æquales sint rectæ H M, K N, æquales quoque erunt M I, N L: Sed M I est excessus quo F I superat D H, & N L excessus quo E L superat G K; patet igitur F I superare D H eodem excessu, quo E L superat G H; & consequenter D H & E L simul sumptas, æquales esse F I, G K simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IJ.

IIsdem positis: Dico rationem D H ad E L minorem esse ratione F I ad G K.

Demonstratio.

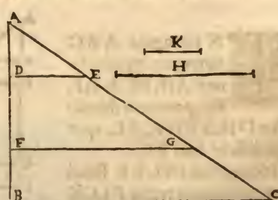
SUpponimus hic rectas F I, G K cadere inter rectas D H, E L; cum igitur sit F I ad D H ut A F ad A D, sitque A F major A D, erit quoque F I major D H; igitur [a] ratio F I ad G K major est ratione D H, ad G K. Et similiter ratio F I ad E L, major ratione D H ad E L. Cum autem E L major sit G K, erit ratio D H ad E L minor ratione F I ad G K: Quod erat demonstrandum.

a 8. *quinti.*

PROPOSITIO IIJ.

IN triangulo A B C oporteat ponere rectas D E, F G, quæ æquidistent basi B C habentes rationem K ad H, sintque lineæ A D, B F æquales.

Constructio & Demonstratio.



DIvidatur A B in D, ut A D sit ad D B, ut K ad H, & fiat B F æqualis A D: ducantur deinde D E, F G, quæ æquidistent B C, factumque erit quod requiritur. Cum enim ex constructione æquales sint A D & B F, & D F communis A F & D B, erit A F æqualis D B; igitur A D est ad A F ut A D ad D B, hoc est K ad H. Quia vero æquidistant D E & F G basi B C, erit [a] D E ad F G ut A D ad A F, hoc est A D ad D B, hoc est K ad H.

a 4. *sexti.*

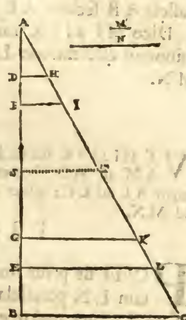
PRO-

PROPOSITIO IV.

IN triangulo A B C posita sit ratio D H ad E L ut lineæ A D, B E æquales sint, ductaque sit S T, quæ rectam A B bisecet in S, sintque D H, S T, E L parallelæ basi B C:

Oportet ponere rationem F I ad G K, ut sint rationes D H ad E L, & F I ad G K cum ratione æqualitatis S T ad S T in continua analogia.

Constructio & Demonstratio.



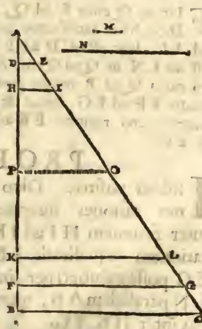
INter D H & S T inveniatur media proportionalis M; & inter S T & E L media sit N: per præcedentem autem ponantur duæ F I, G K in ratione M ad N, ut A F, G B sint æquales: dico factum quod petitur. Quoniam D H, M, & S T sunt proportionales ex constructione uti & E L, N, S T ratio D H ad E L duplicata est rationis M ad N: & c ratio D H ad E L ducta in rationem S T ad S T exhibet rationem D H ad E L. Quare ratio M ad N in se ducta æquatur rationi D H ad E L ductæ in rationem S T ad S T; igitur rationes D H ad E L, M ad N & S T ad S T proportionales sunt. Ex constructione autem rationi M ad N æqualis est ratio F I ad G K, igitur proportionales quoque sunt rationes D H ad E L, F I ad G K & S T ad S T.

c tom. 2. lib. 8. de propor: prop. 93.

PROPOSITIO V.

SInt denuo æquales A D, B F in triangulo A B C, & D E, F G basi parallelæ:

Dico omnem rationem inter-mediam inter rationem D E ad F G & æqualitatis, posse exhiberi a lineis quibusdam H I, K L parallelis basi, quæ cadant inter D E, F G & relinquant D H, F K æquales.



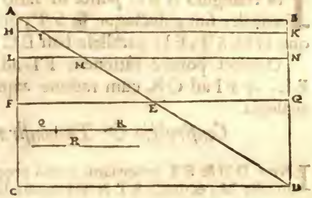
Demonstratio.

SIt igitur quævis ratio M ad N minoris inæqualitatis, major tamen ratione D E ad F G; qualem rationem unam ex intermediis dicimus futuram inter rationem D E ad E F & æqualitatis. Per tertiam autem hujus ponatur ratio H I ad K L rationi M ad N æqualis, ut lineæ quoque A H, B K æquales sint, & patebit veritas propositionis.

PROPOSITIO VI.

QUadratum seu rectangulum A B C D bifariam secet diameter A D, quâ bisectâ in E, ducatur F E G parallela A B secans A E in I, & inter H K & F G quævis L N parallela A B secans A E in M:

Dico H I ad I K rationem minorem esse ratione L M ad M N.



Demonstratio.

VT H I ad I K ita est A I ad I D, hoc est A H ad H C, utque L M ad M N ita A M ad M D, hoc est A L ad L C. Sed ratio A H ad H C minor est quam ratio A L ad L C; igitur etiam ratio H I ad I K minor est quam ratio L M ad M N.

PROPOSITIO VIJ.

POsitis ut prius lineis H I K, F E G: Oportet inter illas ducere rectam L N parellelam A B, ut L M ad MN datam habeat rationem Q ad R, quæ major esse debet ratione H I ad I K minor autem ratione æqualitatis F E ad E G.

Constructio & Demonstratio.

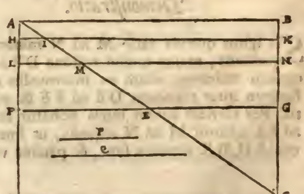
FIat ut Q cum R ad Q, ita A C ad A L, & ducatur L M N parallela A B: Dico hanc satisfacere problemati. Est enim ut Q cum R ad Q, ita A C ad A L, hoc est [a] C D ad L M, hoc est L N ad L M: invertendo igitur L M est ad L N ut Q ad Q cum R, & dividendo L M ad M N ut Q ad R. Quia vero ratio Q ad R major ponitur ratione H I ad I K, & minor ratione æqualitatis F E ad E G, igitur & ratio L M ad M N major est ratione H I ad I K, minor vero ratione F E ad E G, igitur [b] L N recta cadit inter lineas H K, & F G.

a ex 4. sexti

b ex 6. huius.

PROPOSITIO VIIJ.

IIsdem positis: Dico omnes rationes intermedias inter rationem H I ad I K, & rationem æqualitatis F E ad E G posse exhiberi per lineam L N parallelam A B, quæ cadat inter H K, F G.



Demonstratio.

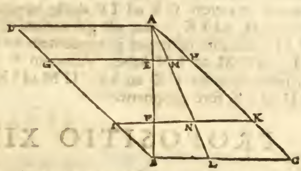
QUod si rationes majoris inæqualitatis distinguere volu-

mus

mus a rationibus minoris inæqualitatis; constitui debent rationes majoris inæqualitatis, ut antecedentes earum termini sint inter lineas I K & E G, & earum consequentes sint inter rectas H I & F E, si vero earum antecedentes sint inter rectas H I & E F, consequentes vero earum termini inter rectas I K E G, tunc prodibunt rationes minoris inæqualitatis. Sit itaque quævis ratio minoris inæqualitatis P Q intermedia inter rationem H I ad I K & rationem æqualitatis F E ad E G: ponatur per præcedentem recta L N divisa in M secundum rationem P ad Q, eritque per rationem L M ad M N omnis ratio minoris inæqualitatis, intermedia inter rationes H I ad I K & F E ad E G, exhibita, quandoquidem ad libitum sumitur.

PROPOSITIO IX.

Parallelogrammum A D B C bisectum sit per diagonalem A B, sumptisque æqualibus A E, B F, ducantur per E & F rectæ G H, I K parallelæ B C, & inter A B & A C quævis ducatur A L, secans E H, F K in M & N:



Dico rationem G M ad I N minorem esse eâ, quam habet G E ad I F, majorem vero ratione G H ad I K.

Demonstratio.

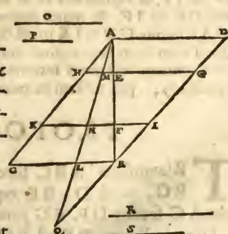
Ratio totius G H ad totum I K major est ratione M H ad N K ablati ad ablatum, cum illa sit ratio æqualitatis, hæc vero minoris inæqualitatis; igitur [a] ratio G M ad I N reliqui ad reliquum major est ratione G H ad I K totius ad totum. Igitur ratio G M ad I N multo major est ratione M H ad N K, hoc est E M ad F N ablati ad ablatum, quare ratio [b] G E ad I F reliqui ad reliquum major est ratione G M ad I N. Patet igitur veritas propositionis.

a 33. *quinti*

b *ibidem*

PROPOSITIO X.

Iisdem positis: Oportet ex A ducere lineam A L, quæ G H, I K secet in M & N, ut G M ad I N datam habeat rationem O ad P, quam minorem esse oportet G E ad I F majorem vero ratione æqualitatis G H ad I K.



Constructio & Demonstratio.

Adjiciatur G B lineæ, quædam B Q, ut [a] ratio G Q ad I Q sit eadem cum ratione O ad P, ducaturque A Q secans G H, & I K in M & N, erit [b] G M ad I N ut G Q ad I Q, hoc est O ad P.

a *tom.* I. *l.* I. *prop.* 18. N. 3.

b *ex Elem:*

PROPOSITIO XI.

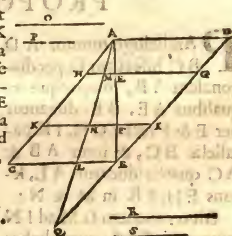
Sint eadem quæ prius: Oportet ponere A L lineam, quæ rectas G H, I K secet in M & N, ut rationes G E ad I F, G M ad I N, G H ad I K sint in continua analogia.

Constructio & Demonstratio.

Inter G E & G H inveniatur media proportionalis R, & inter I F, I K media S: [a] erunt rationes G E ad I F, R ad S, G H ad I K, proportionales, & ratio G E ad I F duplicata rationis R ad S, cum ratio R ad S ducta in se æqualis sit rationi G E ad I F ductę in rationem G H, ad I K, [b] hoc est ipsi rationi G E ad I F: ducatur igitur per præcedentem recta A L, ut G M ad I N habeat rationem R ad S; patet rationes G E ad I F, G M ad I N, G H ad I K fore proportionales.

a tom. 2. lib. 8. de proport. prop. 145.

b Ibidem prop. 39.



PROPOSITIO XII.

Iisdem positis: Dico omnes rationes intermedias inter rationem G E ad I F, & rationem æqualitatis G H ad I K, posse exhiberi per rectam aliquam A L, quę cadat inter A B, & A C, secetque rectas G H, I K in M & N.

Demonstratio.

Detur enim quævis ratio R ad S, una ex intermediis inter rationem G E ad I F, & æqualitatis G H ad I K; erit itaque ratio R ad S minor ratione G E ad I F, & major ratione G H ad I K, quare per prop: 10 hujus ducatur A L secans G H & I K in M & N, ut G M ad I N obtineat rationem R ad S. Quod cum de quavis ratione intermedia inter prædictas rationes fieri possit, patet omnem rationem intermediam inter rationes G E ad I F, & rationem æqualitatis, per rectam ex puncto A eductam assignari posse.

PROPOSITIO XIII.

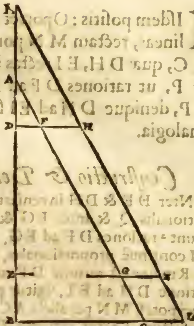
Triangulum A B C secent rectæ duæ D F, E G parallelæ basi B C, ut A D, B E æquales sint: ducaturque quævis L K parallela A C secans D F, E G productas in H & I:

Dico rationem D F ad E G minorem esse ratione D H ad E I.

Demon-

Demonstratio.

PRoducta A B occurrat L K lineæ in K, cum sit ut K D ad K E ita D H ad E I, patet D H rectam minorem esse recta E I, & F H, G I æquales esse; cum tam F H, G I, quam F G, H I parallelæ sint. Igitur ratio D H ad E I minoris inæqualitatis minor est ratione æqualitatis F H ad G I, ᵃ igitur ratio reliqui D F ad E G reliquum, minor est ratione totius D H ad E I totum.



a Clavius in Schol. Prop: 33. exti.

Corollarium.

PAtet ex hac propositione, si in ratione minoris inæqualitatis, à terminis rationem constituentibus æquales partes demantur, partes residuas minorem inter se rationem habere; in ratione vero majoris inæqualitatis, rationem partium majorem fore ratione totius lineæ ad totam.

PROPOSITIO XIV.

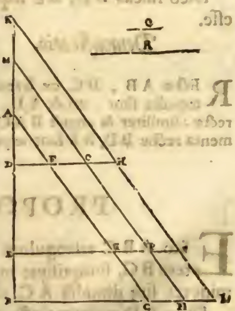
IIsdem positis: data sit ratio Q ad R minor ratione D H ad E I major autem ratione D F ad ad E G:

Oportet inter K L & A C ducere lineam M N parallelam A C, quæ D H, E I secet in O & P, ut D O & E P datam habeant rationem Q ad R.

Constructio & Demonstratio.

AE Lineæ divisæ in D ᵃ adijciatur A M, ut D M ad M E datam habeat rationem Q ad R; & ex M ducatur M N parallela A C, occurrens D H, E I lineis in O & P: patet D O ad E P esse ut D M ad E M, hoc est Q ad R. Quia vero ratio Q ad R major est ratione D F ad E G, hoc est D A ad E A, & minor ratione D H ad E I, hoc est D K ad E K, erit ratio D M ad E M minor quidem ratione D K ad E K, major tamen ratione D A ad E A: igitur M punctum cadet inter A & K. Factum itaque est quod erat faciendum.

a tom. 1. lib. 1. de lin: potent. prop. 18.

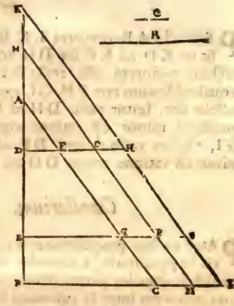


Corollarium.

HInc colliges omnes rationes possibiles, quæ sunt intermediæ inter rationem D F ad E G, & rationem D H ad E I, exhiberi posse per aliquam lineam M N parallelam A C, quæ D H & E I secet in O & P, sitque inter A C & K L.

PRO-

PROPOSITIO XV.

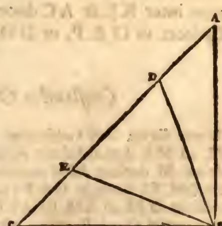


IIſdem poſitis: Oportet inter A C, K L lineas, rectam M N ponere parallelam A C, quæ D H, E I rectas ita dividat in O & P, ut rationes D F ad E G, & D O ad E P, denique D H ad E I ſint in continua analogia.

Conſtructio & Demonſtratio.

INter D F & D H inveniatur media proportionalis Q, & inter E G & E I media ſit R: erunt ᵃ rationes D F ad E G, Q ad R, D H ad E I continuè proportionales, adeoque ratio Q ad R major eſt ratione D F ad E G, & minor ratione D H ad E I, igitur per præcedentem duci poteſt M N parallela A C, ut D O ad E P habeat rationem Q ad R. Id igitur ſit factum: patet rationes D F ad E G, D O ad E P, D H ad E I in continua eſſe analogia.

PROPOSITIO XVI.



ESto A B C triangulum Iſoſcelium rectangulum: ſumptiſque in ſubtenſa A C æqualibus A D, C E, ducantur ex B rectæ B D, B E:

Dico lineas B D, B E æquales eſſe.

Demonſtratio.

REctæ A B, B C ex hypotheſi æquales ſunt, uti & A D, E C rectæ: ſimiliter & anguli B A C, B C A æquales ſupponuntur: quare per Elementa rectæ B D, B E ſunt æquales; Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVII.

ESto A B C triangulum rectangulum habens A B latus majus latere B C, ſumptiſque in A C ſubtensâ æqualibus A D, E C, quæ minores ſint dimidiâ A C, ducantur B D, B E:

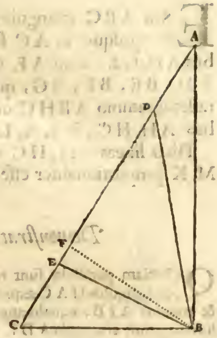
Dico B D majorem eſſe rectâ B E.

Demon-

Demonstratio.

DUcatur B F normalis ad A C quæ cadet intra B D, B E vel extra; erit [a] quadratum A B æquale duobus quadratis A F, B F, & B C quadratum æquale duobus B F, F C. Sed ex suppositione quadratum A B majus est quadrato B C, igitur quadrata duo B F, A F simul sumpta, majora sunt duobus quadratis B F, F C: dempto igitur communi quadrato B F, erit residuum A F majus residuo quadrato C F, quare & A F linea major est quam C F. Sed A D, C E lineæ æquales sunt, residua igitur D F major est, quam sit F E, quare & F D quadratum majus quadrato F E; & addito communi quadrato B F, erunt duo quadrata B F, D F simul sumpta majora quadratis B F, F E, hoc est B D quadratum majus quadrato B E, ergo & B D linea major linea B E.

a 47. *prim*



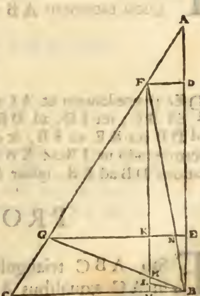
PROPOSITIO XVIIJ.

ESto A B latus trianguli rectanguli A B C majus latere B C, sumtisque in A C subtensa æqualibus A F, C G ponantur B F, B G: Dico rationem A B ad B C majorem esse ratione B F ad B G.

Demonstratio.

POnantur ex punctis F & G rectæ F D, G E parallelæ B C, rectæ autem A B parallela sit F H quæ secet E G, B G in K & M. Quoniam A F, C G sunt æquales, & rectæ F D, G E parallelæ basi B C, [a] erunt quoque A D, B E æquales, [b] & anguli F D B, G E C æquales, & [c] E B, hoc est A D ad D B ut D F ad E G; æqualia [d] igitur sunt triangula, G E B, F D B, hoc est F H B, Quia vero latus A B majus est latere B C, erit A E, hoc est D B, hoc est F H recta, major rectâ E G: igitur angulus F B H a majori subtensus, major est angulo E B G: ablato igitur communi angulo F B G, manet angulus E B F minor angulo G B H: ducatur igitur B L auferens angulum L B H æqualem angulo E B F, cadet B L inter B M, B H, adeoque B L minor est quam B M; quia vero [e] anguli N E B, L H B æquales sunt, similia erunt triangula N E B, L B H: igitur E B ad B H, hoc est E B ad D F, hoc est D B ad E G, hoc est A E ad E G, hoc est A B ad B C; ita B N ad B L. Sed [f] ratio B N ad B L major est ratione B N ad B M, hoc est B F ad B G; igitur ratio A B ad B C major est ratione B F ad B G.

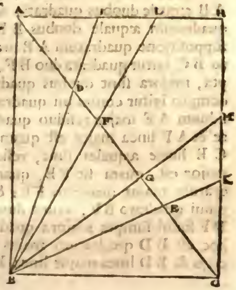
a ex Elem: b 29. *primi* c ex 4. *sexti.* d 15. *sexti.* e 34. *primi* f 8. *quinti*



PROPOSITIO XIX.

Esto ABC triangulum rectangulum sumptisque in AC subtensa æqualibus AD, CE, item AF, CG, ducantur BD, BE, BF, BG, quæ perfecto parallelogrammo ABHC occurrant lateribus AH, HC, in I, K, L, M:

Dico lineas AH, HC in punctis I, L; M, K proportionaliter esse divisas.



Demonstratio.

a 29. primi — Quoniam parallelæ sunt rectæ AH, BC, [a] erit angulus HAC æqualis angulo ACB, & angulus AIB: æqualis angulo IBC: similia igitur sunt triangula ADI, DBC, adeoque [b] ut AD ad DC ita AI ad BC, hoc est AI ad AH. Sed ut AD ad DC, ita CE est ad EA, & ut CE ad EA ita CK ad AB, hoc est CK ad CH; igitur ut AI ad AH, ita CK est ad CH. Similiter ostenditur AL esse ad AH, ut CM ad CH; patet igitur lineas AH, HC in punctis I, L; M, K proportionaliter sectas esse.

b 4. sexti.

PROPOSITIO XX.

Iisdem positis si latus AB majus sit latere BC:

Dico rationem AB ad BC majorem esse ratione BI ad BK.

Demonstratio.

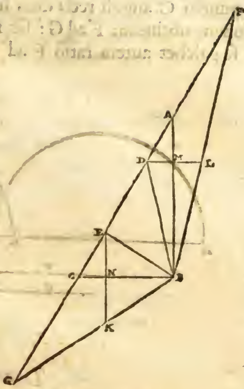
a 4. sexti. — Per præcedentem ut AI ad AH; ita CK ad CH: sed [a] ut AI ad AH, hoc est BC, ita ID, ad DB, & ut CK ad CH ita KE ad EB; igitur ut ID ad DB ita KE ad EB, & componendo ut IB ad DB ita KB ad EB, &
b 18. hujus. — permutando ut IB ad KB ita DB ad EB. Sed [b] ratio AB ad BC major est ratione DB ad EB, igitur & ratio AB ad BC major est ratione BI ad BK.

PROPOSITIO XXI.

Esto ABC triangulum rectangulum quodcumque, sumptisque in AC æqualibus AD, CE, ducantur BD, BE lineæ, & angulo ABD fiat æqualis angulus ABF, & angulo EBC æqualis angulus CBG.

Dico FA lineam æquari lineæ CG.

Demonstratio.



DUcatur DL parallela BC, & EK parallela AB. Quoniam anguli LBM, MBD æquales sunt, & LD normalis ad MB, [a] erunt LM, MD æquales. Similiter etiam EN, NK æquales sunt. Deinde quia tam AB, EK quam DL, BC parallelæ sunt, [b] erunt anguli ADM, ECN æquales uti & anguli AMD ENC, est autem ex constructione rectæ AD æqualis CE, [c] igitur triangula AMD, ENC & similia & æqualia sunt, & linea DM æqualis CN; igitur ut AM ad AB ita CN, hoc est DM, ad CB. Sed ut CN ad CB, ita EN ad AB. Igitur ut DM ad CB ita EN ad AB, hoc est ut ML ad CB ita NK ad AB, [c] igitur ut DL ad CB ita EK ad AB. [d] Sed ut DL ad CB ita FD ad FC, & ut EK ad AB ita GE ad GA, & dividendo ut FD ad DC ita GE ad EA: Sunt autem DC, EA æquales, igitur & reliquæ FD, GE: unde quia AD, EC æquales sunt, etiam reliquæ FA, CG æquales erunt.

a Clavius in Schol: prop:26. primi.
b 29. primi
c 26. primi
c 24. quinti.
d 4. sexti

PROPOSITIO XXII.

IIsdem positis: Dico FB esse ad BG sicut DB ad BE:

Demonstratio.

QUoniam AD æqualis est ipsi EC, & FA ipsi CG; erit ut FA ad AD, ita GC ad CE: Sed cum anguli FBD, EBG bisecti sint per rectas AB, BC, ut [a] FA ad AD ita FB est ad BD, & ut GC ad CE ita GB ad BE. Igitur FB est ad BD ut BG ad BE, & permutando FB ad BG ut BD ad BE.

a 3. sexti

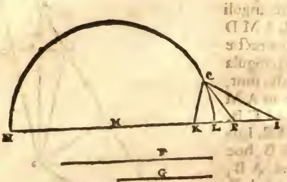
Corollarium.

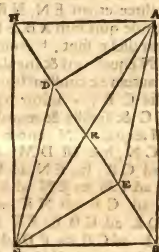
HInc colliges rationem FB ad BG minorem esse ratione AB ad BC, [b] cum hæc ostensa sit major ratione DB ad BE, quæ eadem est cum ratione FB ad BG.

b 18. hujus

PROPOSITIO XXIIJ.

IN dato triangulo H C B rectangulo non Isoscelio, Oportet ex puncto C anguli recti duas lineas inclinare C D, C E, quæ datam rationem obtineant F ad G: sic tamen, ut H D, B E æquales sint inter se; debet autem ratio F ad G minor esse quam ratio H C ad C B.





Demonstratio.

PErficiatur rectangulum H C B A cujus diametri A C, B H sese bisecent in R: Poterit omnis ratio intermedia inter rationem C H ad H A & C R ad R A duci ex puncto aliquo in linea H R, ad puncta C & A; quo posito si dividatur recta C A, ut ejus segmenta sint in eadem ratione cum lateribus trianguli (puta C D A) transibit per puncta [a] C A, & per punctum D circulus, cujus proprietas exhibet triangula super C A exstructa & terminata in perimetro, quorum latera habent eandem rationem quam basis segmenta. Data sit Itaque quævis ratio F G intermedia inter rationem C H ad H A & C R ad R A, quam oportet ponere in triangulo H C B per rectas C D, C E, ut H D, B E æquales sint. Fiat primo super recta C A triangulum C D H, ut C D sit ad D A, ut F ad G; hâc methodo. Assumpta quævis I K recta dividatur in L secundum rationem F ad G, & [b] fiat ut I L ad L K ita I N ad N K, divisâ deinde L N bifariam in M discribatur centro M circulus L Q N, erit hic circulus, ad cujus perimetrum rectæ ductæ ex I & K quomodocumque exhibent rationem I L ad L K, hoc est F ad G: Dividatur itaque I K bifariam in P, & angulo C R H æqualis angulus I P Q, secabit P Q vel tanget circulum L Q N, jungantur autem I Q, Q K, ac denique super recta C A fiat triangulum C D A simile I Q K triangulo, erit ut I Q ad Q K, hoc est I L ad L K, hoc est F ad G ita C D ad D A. Ponatur igitur C E parallela D A; Dico rationem C D ad C E eandem esse cum ratione F ad G, & rectas H D, B E æquales esse; quod sic patebit: Angulus C R D ex constructione æqualis est angulo I P Q, unde angulus D R A, [c] hoc est C R E æqualis est angulo Q P K: Sed etiam [d] anguli R D A, R E C æquales sunt, & linea C A divisa bifariam in R; [e] igitur triangula D R A, R E C similia & æqualia sunt, adeoque lineæ D A, C E æquales, igitur C D est ad C E ut C D ad D A, hoc est I Q ad Q K, hoc est I L ad L K, hoc est F ad G: & ulterius cum triangula D R A, R E C similia & æqualia sint, erunt quoque rectæ D R, R E æquales: & consequenter lineæ H D, B E æquales, est enim ex constructione H B divisa bifariam in R: Duximus itaque rectas C D, C E in ratione F ad G ut H D, B E æquales sint: Quod erat faciendum.

a ex tom. 1. lib. 3. prop. 27. & seq.

b ex 7. & sequ. tom. 1. lib. 1.

c 15. primi

d 29. primi

e 20. primi

Scho-

Scholion.

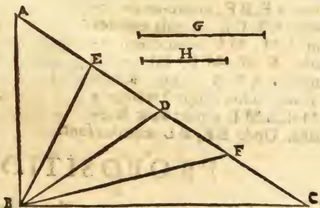
Liquet ex hac demonstratione, merito rationem CD *ad* DA, *aliasque omnes, quæ per rectas a puncto aliquo in linea* HR, *ad puncta* C *&* A *duci possunt, intermedias dici inter rationem* CH *ad* HA *& rationem æqualitatis. Manifeste enim demonstratum est, si recta* CE *æquidistans ponatur rectæ* DA, *rationem* CD *ad* CE *eandem esse cum ratione* CD *ad* DA, *& rectam* HD *æquari rectæ* BE, [a] *quo casu ratio* CD *ad* CE *minor ostensa est ratione* HC *ad* CB, *hoc est* HC *ad* HA, [b] *major autem ratione æqualitatis.* a 18.*hujus* b 16.*hujus*

PROPOSITIO XXIV.

Esto AB latus trianguli rectanguli ABC majus latere BC, divisâque AC bifariam in D, ducatur recta BD:

Oportet inscribere ex puncto B rectas BE, BF auferentes æquales lineas AE, CF ut rationes AB ad BC; BE ad BF, BD ad BD sint proportionales.

Constructio & Demonstratio.

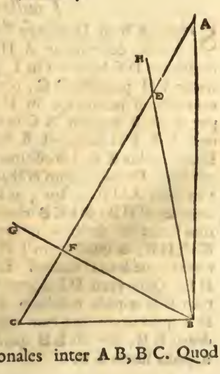


Inveniatur media proportionalis G inter rectas AB, BD & similiter media inter BC, BD, sit H; erunt tres [a] rationes AB ad BC, G ad H, BD ad BD proportionales: Per præcedentē vero propositionē inscribantur, triangulo ABC, rectę BE, BF habentes rationem G ad H, (quæ minor est ratione AB ad BC, cum sit media inter rationem AB ad BC & BD ad BD) ut tamen rectæ sint æquales AE, CF, eritque peractum quod requiritur, cum rationes AB ad BC, G ad H (hoc est BE ad BF) & BD ad BD sint proportionales. a tom. 2. lib. 8. prop. 145.

PROPOSITIO XXV.

Eadem figurâ positâ: sit ratio AB ad BC triplicata rationis BE ad BF, productis BE, BF, similiter in G & H ut rectangulum super BH & BG, sit æquale rectangulo super AB & BC:

Dico BH & BG duas medias proportionales esse inter AB & BC.



Demonstratio.

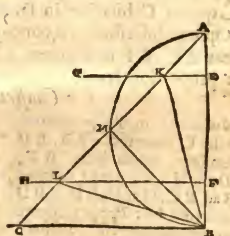
Quoniam BE, BF similiter productæ sunt in G & H, erit ratio BH ad BG, eadem quæ BE ad BF: ponitur autem ratio AB ad BC triplicata rationis BE ad BF, igitur & ratio AB ad BC triplicata est rationis BH ad BG: est insuper rectangulum super AB & BC æquale rectangulo super BH & BG, igitur AB, BH, BG, BC, sunt continuæ proportionales; adeoque BH, BG duæ mediæ proportionales inter AB, BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

Esto A B C angulus rectus: ſumptoque in A B latere puncto quovis A, aſſumantur A E, B F æquales, ponanturque E G, F H parallelæ B C:

Oportet ex A ducere lineam A C occurentem rectis E G, F H in K & L, ut junctæ K B, B L ſint æquales.

Demonſtratio.



Super A B, ut Diametro deſcribatur ſemicirculus A M B: biſectâ peripheriâ A M B in M, ducatur A M C, quæ ſecet E G, F H in K & L; jungantur denique K B, L B: Dico illas eſſe æquales. Cum enim æquales ſint lineæ A E, B F, erunt etiam æquales A K, C L, & quia æquales ſunt A M, M C erunt etiam æquales K M, M L. Eſt autem [a] angulus A M B rectus, nempe in ſemicirculo; igitur [b] triangula K M B, B M L ſimilia ſunt & æqualia. Unde B K, B L æquales ſunt.

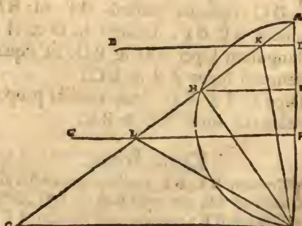
a 31. *tertij.*
b 4. *primi.*

PROPOSITIO XXVIJ.

Esto A B C angulus rectus, ſumptiſque in A B latere inæqualibus A D, B F, ducantur D E, F G parallelæ B C:

Oportet ex A ducere rectam A C, occurrentem D E, F G lineis in K & L, ut junctæ K B, L B ſint æquales.

Conſtructio & Demonſtratio.



Super A B ut Diametro ſemicirculus deſcribatur A H B: diviſâque D F bifariam in I, ponatur I H parallela B C, occurrens circuli perimetro in H, & per H ex A ducatur A C occurrens D E, F G lineis in K & L: Dico junctas K B, L B eſſe inter ſe æquales. Ducatur enim H B, erit [a] angulus A H B rectus, uti & angulus C H B; & [b] K B quadratum æquale duobus quadratis K H, H B, & quadratum L B æquale quadratis duobus L H, H B: Quia vero D I æquatur I F, erit K H æqualis H L, adeoque quadratum H K æquale quadrato L H: addito igitur communi quadrato H B, erit H B quadratum unà cum quadrato L H, æquale quadrato H B unà cum quadrato K B, hoc eſt L B quadratum, æquale quadrato B K: igitur & linea L B æqualis lineæ K B.

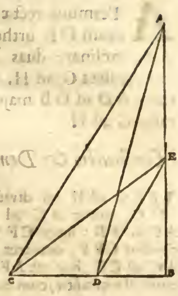
a 31. *tertij.*
b 47. *primi*

PRO-

PROPOSITIO XXVIIJ.

Rectum angulum A B C subtendant quævis duæ A C, A D ex eodem puncto eductæ: sumptoque in latere A B quovis puncto E, ducantur E C, E D.

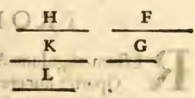
Dico rationem A C ad A D minorem esse ratione E C ad E D.



Demonstratio.

Sint claritatis gratia duæ quantitates inæquales F, G in ratione E C ad E D, & æquales sint H & K, & fiat ut F ad G ita H ad L, erit [a] itaque ratio F cum H ad G cum L ut F ad G, [b] ratio autem F H ad G L major est ratione F H ad G K. cum G cum K major sit quam G cum L. Similiter [c] quia quadratum A C superat quadratum E C quadrato A E & rectangulo A E B bis sumpto, & quadratum A D superat E D quadratum eodem quadrato eodemque rectangulo bis sumpto, hinc ratio quadrati E C ad E D quadratum major est ratione quadrati A C ad quadratum A D; & consequenter lineæ C E ad E D ratio major est quam ratio lineæ A C ad A D.

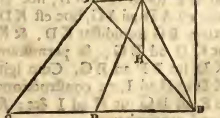
a 12. *quinti*
b 8. *quinti*
b 12. *secun.*



PROPOSITIO XXIX.

Subtendant iterum rectum angulum A B C quævis duæ A C, A D ex eodem puncto eductæ: sumptoque in A B latere quovis puncto E, ducatur E F parallela B C, occurrens A D in G: junganturque B G, B F:

Dico rationem B G ad B F majorem esse ratione B D ad B C.



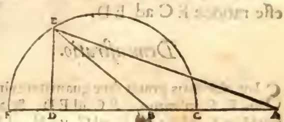
Demonstratio.

Ducatur G H parallela A B, [a] erit ut E G ad E F, hoc est B D ad B C, ita B H ad B F. Sed [b] ratio B G ad B F major est ratione B H ad B F; igitur & ratio B G ad B F major est ratione E G ad E F hoc est B D ad B C; Quod erat demonstrandum.

a 4. *sexti*
b 10. *sexti*

PROPOSITIO XXX.

A Terminis rectæ A B, ad lineam D E orthogonam ipsi A B, inclinare duas A E, B E in ratione data G ad H, debet autem ratio A D ad D B major esse quam ratio G ad H.



Constructio & Demonstratio.

VT G ad H ita dividatur A B in C, utque A C ad C B ita [a] fiat A F ad F B: super C F diametro fiat circulus C E F, occurret ille D E in E, cum sit ratio A D ad D B major quam A C ad C B, hoc est A F ad F B. Denique ponantur ad E lineæ A E, B E, erunt illæ quæsitæ, cum earum ratio eadem [b] sit ostensa, cum ratione A C ad C B.

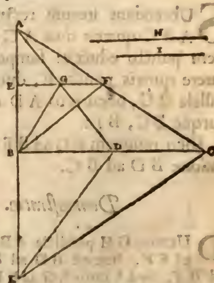
[a] prop. 11. tom. 1. lib. 1.

[b] tom. 1. l. 3. prop. 35.

PROPOSITIO XXXI.

REctum angulum A B C subtendant quævis duæ A D, A C: Oportet ducere rectam E F parallelam B C, quæ A D lineæ occurrat in G, ut junctæ F B, G B datam habeant rationem H ad I, quæ minor esse debet ratione B C ad B D.

Constructio & Demonstratio.



PEr præcedentem propositionem, ex punctis C & D ducantur lineæ C K, D K habentes rationem H ad I: deinde rectæ C K fiat parallela B F, & ex puncto F ducta sit linea F E æquidistans B C, ponaturque B G: Dico factum quod postulatur.

Quoniam C K æquidistat B F, erit ut K C ad B F ita A K ad A B, hoc est A C ad A F, hoc est A D ad A G, hoc est K D ad B G; igitur etiam B G æquidistat K D, & K C est ad B F ut K D ad B G, & permutando ut K C ad K D, ita B F ad B G. Cum igitur K C sit ad K D ut H ad I, ex constructione, erit quoque B F ad B G ut H ad I &c: fecimus itaque quod requirebatur.

PRO-

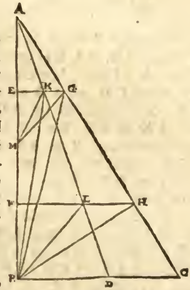
PROPOSITIO XXXIJ.

Rectum angulum A B C subtendant quævis duæ A D, A C, ex eodem puncto eductæ: sumptisque in A B latere, æqualibus A E, B F, ducantur E G, F H parallelæ B C, occurrentes A D lineæ in K & L, junganturque K B, L B, G B, H B:

Dico rationem B H ad B L majorem esse ratione B G ad B K.

Demonstratio.

Ponatur K M parallela B L, & ducatur G M, erit G M parallela B H; cum enim sint parallelę M K, B L, erit ratio A M ad A B, ut A K ad A L; Sed est A K ad A L, ut A G ad A H, igitur G M æquidistat B H; & M K est ad B L ut M G ad B H, igitur permutando M K ad M G, ut B L ad B H, & convertendo M G ad M K ut B H ad B L: unde M G ad M K erit ad rationem B G ad B K, ut ratio B H ad B L ad eandem rationem B G ad B K.[a] Sed ostensum est, quod ratio M G ad M K major sit ratione, quam habet, B G ad B K, igitur ratio B H ad B L major quoque est ratione B G ad B K. a 28. *hujus*



Corollarium.

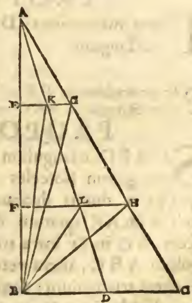
Hinc manifestè colligitur[b] rationem B G ad B H, minorem esse ratione B K ad B L. b *ex* 27. *quinti.*

PROPOSITIO XXXIIJ.

Iisdem manentibus: Dico triangulum K B G æquale esse L B H triangulo,

Demonstratio.

Quoniam E K & F L parallelæ sunt, & normales ad rectam A B, erunt anguli K E B, L F B æquales, & ratio E K ad F L æqualis rationi A E ad A F, hoc est B F ad B E: igitur[a] triangulum K E B æquale est L F B triangulo. Sunt autem similiter E G B, F H B triangula inter se æqualia, ablatis igitur æqualibus E K B, L F B remanent K B G & L B H æqualia. a 15. *sexti.*



PROPOSITIO XXXIV.

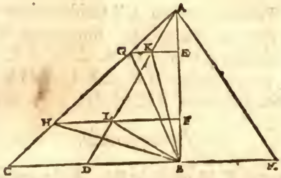
Iisdem manentibns: Dico triangulum K B L ad G B H sortiri rationem B D ad B C.

Demonstratio.

Triangulum B K D ad B G C triangulum,[a] habet rationem B D ad B C: sed ablatum B L D ad B H C ablatum habet quoque rationem B D ad B C; igitur & residuum K B L est ad G B H residuum, ut B D ad BC. a 1. *sexti.* b 19. *quinti*

PROPOSITIO XXXV.

EAdem figura manente: sit AB latus majus latere BD, & intelligantur BD, BA, BC continuæ esse proportionales: Dico rationem BK ad BL æqualem esse rationi BH ad BG.



Demonstratio.

PRoducatur DB in M, ut BD, BM sint æquales, & jungantur MA. Quoniam MB, BA, BC continuæ sunt proportionales, erit [a] MAC angulus rectus, & MAB, hoc est triangulum BAD, [b] simile triangulo BAC. Igitur [c] AC est ad CB, ut AD ad AB, & permutando ut AC ad AD ita CB ad AB, & invertendo ut AD ad AC ita AB ad BC. Sed ut AD ad AC ita [d] AK ad AG, hoc est HC; igitur ut AB ad BC ita AK ad HC, & permutando ut AB ad AK ita BC ad HC; sunt autem æquales anguli BAK HCB, [e] similia igitur sunt triangula AKB, BHC; igitur ut AK ad KB ita HC ad HB, & permutando ut AK ad HC, hoc est ut AK ad AG, hoc est ut AD ad AC, hoc est ut AB ad BC, hoc est ut BD ad AB ita KB ad HB: Eadem methodo similia erunt triangula ABG, BLD: eritque ut AG ad GB, ita LD ad LB, & GB ad LB ut AG ad LD, hoc est AG ad AK, hoc est AC ad AD, hoc est CB ad AB, hoc est AB ad BD. Sed ut BD ad AB ita KB ad HB, & invertendo ut AB ad BD ita HB ad KB; igitur BH est ad BK, ut GB ad LB, & permutando HB ad GB, ut KB ad LB. Quod erat demonstrandum.

a ex 8. sexti
b ibidem.
c 4. sexti.
d 2. sexti.
e 6. sexti.

PROPOSITIO XXXVI.

IIsdem manentibus: Dico rectangulum KBG æquale esse LBH rectangulo.

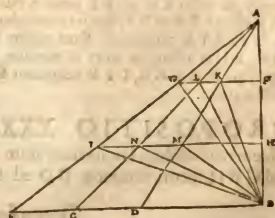
Demonstratio.

PEr præcedentem BK est ad BL ut BH ad BG, patet igitur [a] ex elementis rectangulum BKG æquale esse LBH rectangulo.

a 16. sexti.

PROPOSITIO XXXVII.

SIt ABC triangulum rectangulum Isosceles: atque ex A ductis duabus lineis AD, AE quarum AD secet BC in D intra triangulum ABC, altera vero in E extra triangulum: sumantur deinde in AB æquales duæ AF, BH, ducanturque FG, HI parallelæ basi BC occurrentes rectis AD, AC in K, L, M, N: & jungantur BK, BL, BG, BM, BN, BI:



Dico rationem BK ad BM majoris esse inæqualitatis, rationem vero BL ad BN æqualitatis, denique rationem BG ad BI minoris esse inæqualitatis.

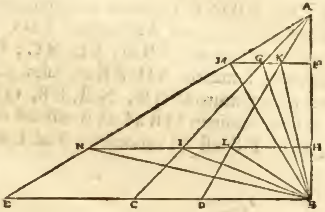
Demon-

Demonstratio.

DUas primas partes hujus propositionis demonstratas invenies prop: 17. & 16. hujus. Tertiam vero nempe rationem BG ad BI esse inæqualitatis minoris, sic demonstro. Per corollarium prop: 32. hujus ratio LBN major est ratione GBI; cum igitur ratio LBN sit æqualitatis, patet rationem GB ad BI minoris esse inæqualitatis.

PROPOSITIO XXXVIIJ.

ESto ABC triangulum Isosceles rectangulum: ductaque quâvis AD intra triangulum ABC, fiant BD, BC, BE continuè proportionales, junctisque AE sumantur in AB latere æquales AF, BH, ponanturque FM, HN parallelæ basi BE, & junganturKB, GB, MB, LB, IB, NB: Dico rationes KB ad LB, GB ad IB, MB ad NB in continua esse analogia.



Demonstratio.

QUoniam BD, BC, hoc est AB, & BE continuæ sunt proportionales, & AF, BH æquales, erit [a] ut KB ad LB, ita NB ad MB: igitur ratio KB ad LB ducta in rationem MB ad NB producit idem quod ratio KB ad LB ducta in rationem LB ad KB; igitur rationes KB ad LB, GB ad IB, MB ad NB sunt continuè proportionales. a 35. *hujus.*

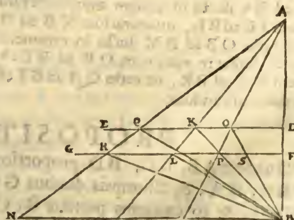
PROPOSITIO XXXIX.

ESto ABC angulus rectus, sumptisque in AB latere inæqualibus AD, BF secet AC parallelas DE, FG in K & L, ut junctæ KB, LB sint æquales: sint insuper ex A binæ lineæ ductæ, AM quidem intra triangulum ABC, AN vero extra; junganturque OB, KB, QB, BP, LB, RB.

Dico rationem OB ad PB majoris esse inæqualitatis, rationem vero QB ad RB minoris inæqualitatis.

Demonstratio.

QUadratum [a] KB superat quadratum OB quadrato KO, & rectangulo KOD bis sumpto. Similiter quadratum LB superat quadratum PB quadrato LP & LPF rectangulo bis sumpto: Sed OK quadratum minus est quadrato PL, & KOD rectangulum minus rectangulo LPF, igitur quadratum KB minori excessu superat quadratum OB, quam LB quadratum superat quadratum PB; sunt autem KB, LB quadrata ex suppositione æqualia, igitur quadratum OB majus est quadrato PB, adeoque OB linea major quam linea PB, & ratio OB ad PB majoris inæqualitatis: similiter quadratum QB minori excessu superat quadratum KB, quam RB quadratum superat quadratum LB; suntque KB, LB quadrata æqualia, igitur QB quadratum minus est quadrato RB, igitur linea QB minor est rectâ RB. Patet itaque veritas propositionis. a 12. *secundi.*



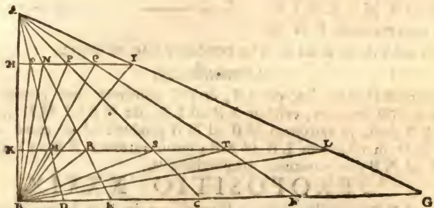
Corollarium.

HInc patet rationem D B ad F B majorem esse ratione O B ad P B: nam ratio D B ad F B est ratio O B ad S B: Sed ratio O B ad S B major est ratione O B ad P B, cum S B minor sit quam P B, igitur ratio D B ad F B major est ratione O B ad P B.

PROPOSITIO XL.

ESto A B C triangulum rectangulum Isosceles, ductisque duabus A D, A E intra triangulum A B C, ac aliis duabus A F, A G extra triangulum, ut B D, B E, B C, B F, B G continuè sint proportionales; sumantur A H, B K æquales, ducanturque H I, K L parallelæ B G; junganturque O B, N B, P B, Q B, I B, M B, R B &c.

Dico rationem O B ad M B esse ad rationem N B ad R B, vt ratio Q B ad T B est ad rationem I B ad L B.



Demonstratio.

QUoniam B D, B E; B C, B F, B G continuè sunt proportionales: erunt tam B D, B C, B G quam B E, B C, B F proportionales, quarum media communis est B C. Igitur [a] rationes O B ad B M, P B ad B S, I B ad B L; item rationes N B ad B R, P B ad B S, Q B ad B T continuè sunt proportionales: Quia vero ratio P B ad B S utrique seriei communis est media, ratio P B ad B S ducta in seipsam æqualis est tam rationi O B ad B M ductæ in rationem I B ad B L, quam rationi N B ad B R ductæ in rationem Q B ad B T; igitur ratio O B ad B M ducta in rationem I B ad B L æqualis est rationi N B ad B R ductæ in rationem Q B ad B T: [b] igitur ratio O B ad M B est ad rationem N B ad B R, ut ratio Q B ad B T est ad rationem I B ad B L; quod erat demonstrandum,

a 38. *hujus*

b *ex prop.* 85. *tom.* 2. *lib.* 8.

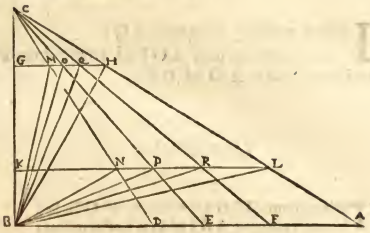
PROPOSITIO XLI.

POnantur A B, B C, B D proportionales lineæ, uti & B D, B E, B F, B A, & assumptis duabus G H, K L basi trianguli A B C parallelis, & ab extremis punctis B, C æquè remotis, ponantur C D, C E, C F, & ulterius B M, B N, B O, B P, B Q, B R, B H, B L:

Dico rectangulum M B H ad O B Q eandem sortiri rationem, quam habet N B L rectangulum ad rectangulum P B R.

Demon-

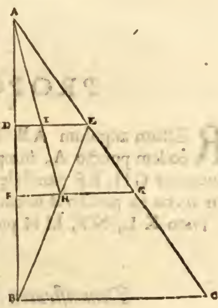
Demonstratio.



QUoniam proportionales sunt rectæ B D, B E, B F, B A, [a] erit rectangulum D B A æquale E B F rectangulo. Sed [b] rectangulum D B A æquale est quadrato C B; igitur etiam rectangulum E B F æquale est quadrato C B, igitur recta C B tam est media proportionalis inter rectas B E, B F, quam inter B D, B A: adeoque sicut [c] similia sunt triangula A B C, C B D, & consequenter [d] rectangula M B H, N B L æqualia, ita quoque similia sunt triangula F B C, E B C, & rectangula O B Q, P B R æqualia. Patet igitur veritas propositionis.

a 16. *sexti*
b 17. *sexti*
c *ex* 8. *sexti.*
d 36. *hujus*

PROPOSITIO XLII.



ESto A B C triangulum rectangulum, sumptisque in A B latere æqualibus A D, F B ducantur D E, F G parallelæ basi B C, ductâque E B, quæ F G secet in H, ducatur A H occurrens D E in I.

Dico rationem D I ad F G triplicatam esse ejus quam habet A D ad D B.

Demonstratio.

UT A D ad A F, ita D I ad F H, sed etiam ut A D ad A F, hoc est B F ad B D; ita F H ad D E, igitur ut D I ad F H, ita F H ad D E: rursus ut A D ad A F ita D E ad F G, igitur ut F H ad D E, ita D E ad F G, quare D I, F H, D E, F G continuè sunt proportionales: & ratio D I primæ ad F G quartam triplicata est rationis D I primæ ad secundam F H, hoc est A D ad B F, hoc est A D ad D B.

PROPOSITIO XLIII.

IIsdem positis: Dico triangulum A D I ad triangulum B D E triplicatam habere rationem ejus quam habet A D linea ad lineam D B.

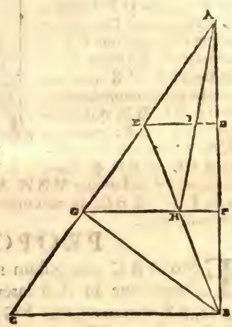
Demonstratio.

RAtio [a] trianguli A D I ad triangulum B D E composita est ex ratione D I ad D E & ex ratione A D ad D B: Sed quia D I, F H, D E sunt proportionales, ratio D I ad D E duplicata est rationis D I ad F H, hoc est A D ad A F, hoc est A D ad D B, igitur ratio trianguli A D I ad D B E triangulum composita est ex duplicata ratione A D ad D B, & ex ratione A D ad D B iterum sumptâ, igitur ratio trianguli A D I ad D B E triangulum triplicata est rationis A D ad D B.

a *Clavius ad* 23. *sexti ex comand.*

PROPOSITIO XLIV.

Iisdem positis; jungatur B G:
Dico triangulum A D I ad triangulum F B G triplicatam habere rationem rectæ A D ad D B.



Demonstratio.

a 33. *hujus.*
b *per præcedentem.*

Triangulum D E B est [a] æquale F G B. Sed [b] ratio trianguli A D I ad D B E est triplicata rationis A D ad D B, ergo & ratio trianguli A D I ad triangulum F B G triplicata est rationis A D ad D B.

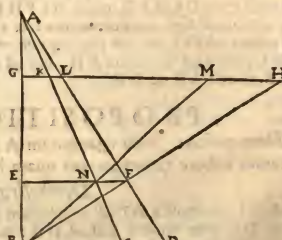
PROPOSITIO XLV.

Rectum angulum A B C subtendant quævis duę A C, A D, ex eodem puncto A, sumptisque in A B latere, A G, B E æqualibus, ducantur G H, E F parallelę basi B D, & per puncta N & F ducantur rectæ ex puncto B occurrentes G H in M & H:
Dico K L, N F, M H proportionales esse.

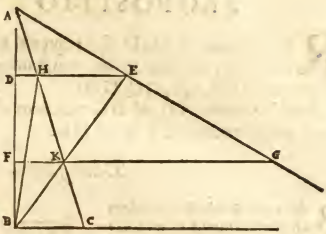
Demonstratio.

a 19. *quinti*
b *ibidem.*

Ut A G ad A E ita est G L ad E F; similiter ut A G ad A E ita est G K ad E N, [a] igitur K L est ad N F, ut A G ad A E, hoc est B E ad B G, hoc est E N ad G M, hoc est E F ad G H, hoc est [b] N F ad M H. Igitur ut K L ad N F, ita est N F ad M H. Proportionales itaque sunt K L, N F, M H.



PROPOSITIO XLVI.



STatuantur in triangulo rectangulo A B C parallelæ D E, F G æqualiter a punctis A B distantes, & positâ B H, ducatur quoque B K, quæ occurrat D E in E, ducatur ex A recta A E G.

Dico D H, F K, D E, F G proportionales esse.

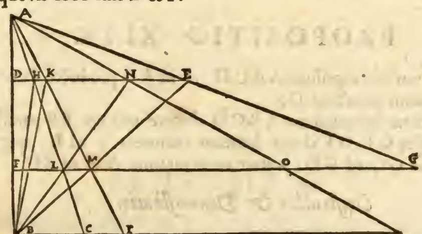
Demonstratio.

UT est D H ad F K, hoc est A D ad A F, hoc est B F ad B D, ita est F K ad D E: Sed ut F K ad D E, hoc est B F ad B D, hoc est A D ad A F, ita est D E ad F G, igitur ut F K ad D E, ita est D E ad F G. Sunt igitur proportionales D H, F K, D E, F G, Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XLVIJ.

SInt duo triangula A B C, A B I rectangula, quæ secent duas parallelas D E, F G basi æquidistantes, & æqualiter sumptas a punctis A & B: ductis deinde B H, B K & B L, B M quæ occurrant D E in N, & E; ponantur ex A per N & E rectæ A N O, A E G:

Dico rationem H K ad O G semper esse triplicatam rationis A D ad D B, quovis loco sint D & F.



Demonstratio.

QUia igitur per diversam distantiam D & F a punctis A & B, mutatur ratio A D ad D B; hinc omnes rationes triplicatæ in proposito schemate includuntur. Sic autem constabit veritas propositionis, quæ nullo modo requirit aliam determinationem linearum D E, F G, quam ut distent a punctis A & B æqualiter. [a] Ostensæ sunt lineæ H K, L M, N E proportionales: Sed ut L M ad N E, hoc est F M ad D E, hoc est B F ad B D, hoc est A D ad A F, ita D N est ad F O, & D E ad F G, igitur N E est ad O G ut D N ad F O, hoc est A D ad A F, hoc est B F ad B D, hoc est L M ad N E, Sed ut L M ad N E ita quoque H K ad L M, igitur H K, L M, N E, O G proportionales sunt, & ratio H K ad O G triplicata est rationis H K ad L M, hoc est D K ad F M, hoc est A D ad A F, hoc est A D ad D B.

a 45. huius

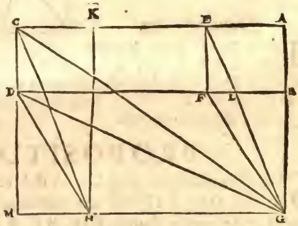
PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

Rectangulum A B C D secet quęvis E F parallela A B, productâque A B, sumatur in illa punctum quodcumque G, ex quo ducantur rectę G E, G F, G C, G D:

Dico rationem A G ad B G majorem esse ratione E G ad F G, & hanc majorem ratione C G ad D G.

Demonstratio.



a 2. *sexti.* b 8. *quinti.* c *ex* 19. *primi, & præcedentibus,* d 28. *hujus*

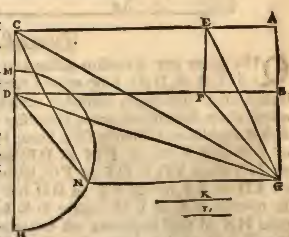
Ratio A B ad B G [a] eadem est cum ratione E G ad L G: at [b] ratio E G ad L G major est ratione E G ad F G, cum [c] L G minor sit quam F G: igitur ratio A G ad B G major est ratione E G ad F G. Rursum sumatur C K æqualis E A, ductâque G H parallelâ B D, ponatur K H parallela A G, junganturque C H, D H; & C D producta occurrat G H in M. [d] Erit ratio C G ad D C minor ratione C H ad D H: Sed ratio C H ad D H eadem est cum ratione E G ad F G (nam cum C K æqualis ponatur E A, & K H parallela & æqualis A G, erit C H æqualis E G, & D H æqualis F G) igitur ratio E G ad F G minor est ratione C G ad D G.

PROPOSITIO XLIX.

Esto iterum rectangulum A B C D: & in A B producto latere determinatum punctum G:

Oportet intra rectangulum A B C D ducere rectam E F parallelam A B, ut junctę G E, G F datam habeant rationem K ad L, quę major sit ratione G C ad G D, minor vero ratione A G ad B G.

Constructio & Demonstratio.



a *tom.* 1. *lib.* 1. *prop:* 12. b 8. *quinti.*

Dividatur C D in M, ut C M sit ad M D, quemadmodum K est ad L: tum ipsi C D [a] adjiciatur in directum D H, ut sit C H ad H D, sicut C M est ad M D; descriptoque, super M H diametro, circulo, qui G N parallelam rectæ A C secabit in N (cum enim ratio A G ad B G major sit ratione K ad L, hoc est C M ad M D, hoc est C H ad D H, erit dividendo ratio A B ad B G major ratione C D ad D H, rectæ autem A B, C D æquales sunt, adeoque [b] B G minor rectâ D H)

Iun-

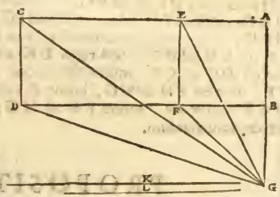
Iungantur itaque N C, N D, ſumptâque C E æquali G N, ponatur E F parallela A B, ducanturque G E, G F: Dico factum quod petitur. Quoniam C H diviſa eſt in M & D mediâ & extremâ ratione proportionali, & M N H ſemicirculus, [c] erit C N ad N D ut C M ad M D, hoc eſt ut K ad L. Sed cum E C parallela ſit & æqualis ipſi G N, [d] recta E G æquatur rectæ C N, & ſimiliter F G ipſi D N; igitur E G eſt ad F G ut K ad L. c tom.1. lib.3. prop.35. d 35.primi.

PROPOSITIO L.

IIſdem poſitis: Oportet intra rectangulum A B C D rectam E F ponere parallelam A B, ut rectæ G E, G F ex puncto G determinato eductæ habeant rationem, quæ media ſit proportionalis inter rationem A G ad B G, & rationem G C ad G D.

Conſtructio & Demonſtratio.

INter A G & C G inveniatur media proportionalis K: & inter B G & D G media L: ac per præcedentem ducatur E F parallela A B, ut junctæ E G, F G habeant rationem K ad L; Dico factum quod petitur. Cum enim tam A G, K, & C G, quam B G, L, & D G ſint continuè proportionales, [a] ratio A G ad K eſt ad rationem B G ad L, ſicut ratio K ad C G eſt ad rationem L ad D G: ſed ut [b] ratio A G ad K ad rationem B G ad L ita ratio A G ad B G ad rationem K ad L, & ut ratio K ad C G eſt ad rationem L ad D G, ita ratio K ad L ad rationem C G ad D G. Igitur ut ratio A G ad B G ad rationem K ad L, hoc eſt per conſtructionem E G ad F G, ita ratio E G ad F G ad rationem C G ad D G, igitur proportionales ſunt rationes A G ad B G, E G ad F G, C G ad D G. a ex 44. tom.2.lib.8 b tom.2. lib.8.prop. 39.



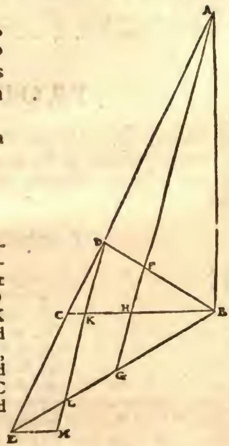
PROPOSITIO LI.

IIſdem manentibus: Dico omnes rationes intermedias inter rationem A G ad B G & rationem C G ad D G poſſe exhiberi per rectas G E, G F terminatas in parallelis A C, B D, ut E F juncta, ſit parallela rectę A B.

Demonſtratio.

DEtur enim quævis ratio K ad L intermedia inter prædictas rationes: & per 49. hujus ducatur E F, ut junctæ E G, F G habeant rationem K ad L: quod cum de omnibus rationibus inter prædictas intermediis fieri poſſit, patet veritas propoſitionis.

PROPOSITIO LIJ.



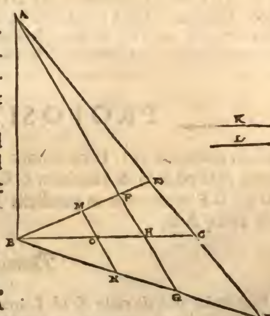
Esto A B C triangulum rectangulum, ductâque quâvis B D, fiat angulo D B C ęqualis angulus C B E, & quavis ducatur A G secans B D, B C, B E in F, H, & G.

Dico rationem D C ad C E minorem esse ratione F H ad H G.

Demonstratio.

Ducatur D L parallela F G, & E M parallela C K, patet E M cadere ultra L. Quoniam igitur, G L, F G parallelæ sunt, igitur ut B D ad B F ita D L est ad F G. Sed etiam ut BD ad B F ita DK ad F H, igitur ut DL ad FG ita DK ad F H, & permutando ac dividendo ut D K ad K L ita F H ad H G. Sed ratio D K ad K M, hoc est D C ad C E, minor est ratione D K ad K L, hoc est F H ad H G, igitur & ratio D C ad C E minor est ratione F H ad H G; quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LIIJ.



Esto A B C triangulum rectangulum, ductâque quâvis B E intra triangulum, ducatur B D ita ut angulus E B C sit æqualis angulo C B D.

Oportet A G ducere ut F H ad G H datam habeat rationem K ad L, quam majorem esse oportet ratione E C ad C D.

Constructio & Demonstratio.

Fiat ut K ad L ita B M ad B N, ductâque M N, ponatur ex A recta A G parallela M N occurrens B E, B D, B C in F, H & G: Dico factum quod petitur. Patet ex Elementis.

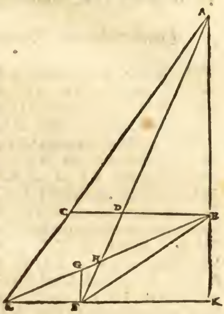
PRO-

PROPOSITIO LIV.

Rectum angulum ABC subtendant duæ quævis A C, A D quibus productis ponaturquęvis F E parallela D C, junganturque B E, B F: Dico rationem B C ad B D majorem esse ratione B E ad B F.

Demonstratio.

BE occurrat A F lateri in H, & ex F ponatur F G parallela A B. Quoniam A B, F G parallelas secat A F linea, necessario cadit G inter H & E, unde B G linea major est rectâ B H. Producta E F occurrat A B productę in K: quoniam G F, B K parallelæ sunt, [a] erit ut E K ad F K ita E B ad G B, sed ut E K ad F K, ita C B ad D B, igitur ut C B ad D B ita E B ad G B. Sed [b] ratio E B ad G B major est ratione E B ad F B, (est enim B F major B G cum angulus B G F, hoc est G B K major sit angulo K B F, hoc est B F G) igitur & ratio B C ad B D major est ratione B E ad B F.



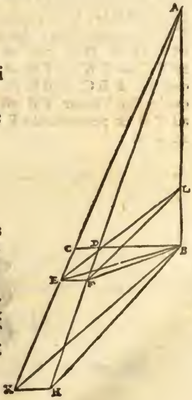
a 2. *sexti.*
b 8. *quinti*

PROPOSITIO LV.

Iisdem positis: Ponatur infra F E quævis illi parallela H K, junganturque B K, B H: Dico rationem B E ad B F majorem esse ratione B K ad B H.

Demonstratio.

POnatur E L parallela K B, junganturque F L; quia igitur tam E F, K H parallelæ sunt quam E L, K B, [a] erunt anguli L E F, B K H æquales, utque [b] A E ad A K ita E L ad K B, ita E F ad K H, adeoque L E est ad E F ut B K ad K H; [c] triangula igitur E L F, K B H similia sunt: quare E L est ad L F, ut K B ad B H: [d] Sed ratio B E ad B F major est ratione L E ad L F, igitur & ratio B E ad B F major est ratione B K ad B H.



a ex 29. *primi.*
b 4 *sexti.*
c 6. *sexti.*
d 28. *hujus*

PROPOSITIO LVJ.

RECtum angulum A B C subtendant quęvis duæ A C, A D, positâque E F parallela B C, ducantur B G, B F:

Oportet ducere ex B duas B K, B H habentes rationem B F ad B G, sic ut juncta H K æquidistet B C.

Constructio & Demonstratio.



FIat angulo F B C æqualis C B K, & B K linea occurrat A C in K, ducaturque K L parallela B C occurrens A D productæ in H, junganturque B, H: Dico B K esse ad B H ut B F ad B G. Est enim [a] F E ad K L ut A E ad A L, sed etiam ut A E ad A L ita G E ad H L, igitur F E est ad K L, ut G E ad H L, sunt autem anguli F E B, B L K æquales, uti etiam anguli E B F, L B K ex constructione, similia igitur sunt triangula F E B, B L K, & F E ad K L ut E B ad B L: Sed etiam ut E B ad B L ita E G ad L H, & G E ad E B ut H L ad L B: suntque anguli G E B, H L B recti, igitur [b] etiam similia sunt triangula G E B, H L B, quare & anguli E B G, L B H adeoque residui G B C, C B H æquales sunt, [c] igitur G B est ad B H ut G D ad D H, hoc est F C ad C K: sed ut F C ad C K ita F B ad B K (cum anguli quoque F B C, C B K ex constructione æquales sint) igitur F B est ad B K, ut G B ad B H & permutando F B ad G B ut B K ad B H.

a 4. sexti.
b 6. sexti.
c 3. sexti.

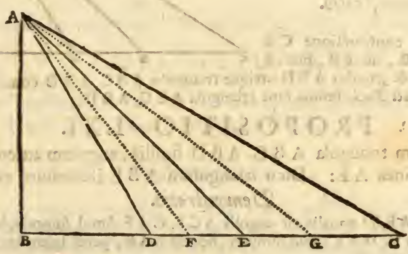
DE

DE FIGURIS TRIANGULARIBUS PARS SECUNDA

Triangula similia, & in illis rationes similes, & rectangula æqualia considerat.

PROPOSITIO LVII.

SInt A B C, A B D similia triangula, & rectæ B A æqualis sit recta B E, junganturque A, E:
Dico lineas B C, B E, B D proportionales esse.



Demonstratio.

QUandoquidem similia sunt triangula A B C, A B D, igitur [a] C B est ad B A, ut B A hoc est B E ad B D, sunt itaque B D, B E, B C in continua analogia. Idem dicendum de rectis B F, B E, B G si recta A E bisecat angulum F A G. [a] 4. sexti.

PROPOSITIO LVIII.

IIsdem manentibus: Dico angulos C A E, E A D æquales esse.

Demonstratio.

SUnt similia triangula A B C, A B D, igitur C B est ad B A ut C A ad A D; Sed ut C B ad B A, hoc est B E, ita B E ad B D; igitur dividendo C E ad E B ut E D ad D B, & permutando C E ad E D ut E B, hoc est A B ad B D, hoc est C B ad B A, hoc est A C ad A D; quare per 3. sexti Eucl: angulus C A E æqualis est E A D.

PRO-

PROPOSITIO LIX.

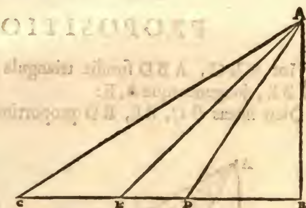
POnatur A B E triangulum Isoscelium, & ducantur ex puncto A quævis rectæ A C, A D, quarum angulus a recta A E bisectus sit: Dico triangula A B C, A B D similia esse.

Demonstratio.

a 32. primi. QUoniam Isosceles est A B E, erunt anguli B A E, A E B æquales, & ex constructione angulus D A E æqualis est angulo E A C: Cum igitur [a] angulus A D B duobus angulis A E D (hoc est B A E) & D A E hoc est E A C æqualis sit, erit A D B toti angulo B A C æqualis; est autem angulus A B E communis utrique triangulo: reliquus igitur B A D æqualis est B C A, ac proinde similia sunt triangula A B C, A B D.

PROPOSITIO LX.

POsito iterum Isoscelio A B E, fiant proportionales B D, B E, B C, & ductæ sint rectæ A D, A C: Dico triangula A B C, A B D similia esse.



Demonstratio.

CUm ex constructione C B sit ad E B, ut E B, hoc est A B, ad B D, & angulus A B D utrique triangulo A B C, A B D communis, igitur per 6. sexti Eucl: similia sunt triangula A B C, A B D.

PROPOSITIO LXI.

SInt iterum triangula A B C, A B D similia, angulum autem C A D bisecet linea A E: Dico triangulum A B E Isoscelium esse.

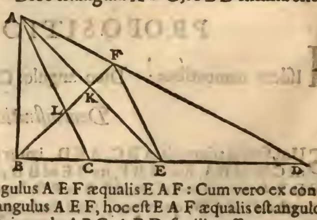
Demonstratio.

a 32. primi. b 6. primi. ANgulus A E B [a] æqualis est angulis A C E, C A E simul sumptis, hoc est angulis B A D, D A E simul sumptis, hoc est B A E, patet igitur [b] triangulum A B E Isoscelium esse.

PROPOSITIO LXII.

SIt A B E Isosceles rectangulum, & per rectam B F sit angulus A B E bisectus, et ductâ quâvis A D, quæ secet rectam B F in F, ducatur F E & illi æquidistet recta A C: Dico triangula A B C, A B D similia esse.

Demonstratio.



QUoniam A B E Isoscelium ponitur rectangulum, igitur semirecti sunt anguli B A E, B E A, uti & anguli A B K, K B E per constructionem: recti igitur sunt anguli A K B, B K E, [a] hoc est A K F F K E, & A E [b] divisa est bifariam in K; igitur [c] A F æqualis est rectæ F E; quare Isosceles est A F E, & angulus A E F æqualis E A F: Cum vero ex constructione parallelæ sint A C, F E, [d] angulus A E F, hoc est E A F æqualis est angulo C A E. Patet igitur per 59. hujus triangula A B C, A B D similia esse.

a 15. primi. b 3. sexti. c 4. primi. d 29. primi.

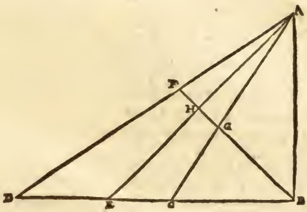
PRO-

PROPOSITIO LXIIJ.

SInt denuo ſimilia triangula A B C, A B D & æquales ſint A B, B E. ductâque rectâ A E, biſecet recta B F angulum A B D.

Dico triangula A B H, H B E æqualia eſſe & ſimilia, ſicut & triangula F A H & G A H.

Demonſtratio.



EX conſtructione Iſoſceles eſt triangulum A B E, & angulus A B E biſectus rectâ B F [a] eſt quoque A E biſecta in H: igitur ſimilia & æqualia ſunt triangula A B H, H B E. Similiter quia anguli A H B, B H E æquales ſunt, & recti, etiam ſunt rectis æquales, [b] qui eiſdem ad verticem exiſtunt; eſt autem demonſtratum [c] angulos G A H, H A F æquales eſſe, eſtque recta A H communis utrique triangulo, adeoque [d] ſimilia & æqualia ſunt triangula F A H, G A H.

a 3. *ſexti.*
b 15. *primi.*
c 58. *hujus.*
d *ex* 26. *primi.*

PROPOSITIO XLIV.

IIſdem manentibus: Dico C G B triangulum triangulo A F B ſimile eſſe, & triangulo A G B triangulum D F B.

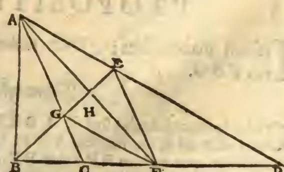
Demonſtratio.

QUoniam ſimilia ponuntur triangula A B C, A B D, igitur A C B, B A F anguli æquales ſunt, uti & anguli A B F, G B C ex conſtructione; ſimilia igitur ſunt triangula C B G, A F B; uti & triangula A G B, D F B, cum ob ſimilitudinem triangulorum A B C, A B D, æquales ſunt anguli B A C, B D A, & ex conſtructione angulus A B G, G B D angulo æqualis.

PROPOSITIO LXV.

IIſdem manentibus, jungantur E F, G F:

Dico triangula F E D, F G C ſimilia eſſe C A D triangulo.



QUoniam æquales ſunt lineæ [a] G H, H E, & [b] ſimiliter A H, H F, erit [c] A E F G parallelogrammum: parallelæ itaque ſunt A C, E F, & A D, G F; igitur [d] triangulum A C D ſimile eſt triangulo G C F, & triangulo A D C, hoc eſt A C D ſimile triangulum E D F; patet igitur triangula F E D, F G C triangulo C A D ſimilia eſſe.

a *ex* 63. *hujus.*
b 3. *ſexti.*
c *Clavius in* 34. *primi*
d *ex* 4. *ſexti.*

PRO-

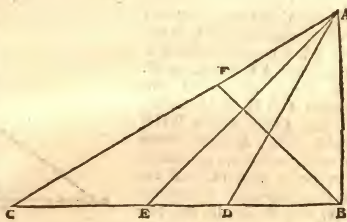
PROPOSITIO LXVI.

SInt B D, B E, B C in triangulo A B C proportionales, sitque A B æqualis B E, & B F bisecet angulum A B C.

Dico A F ad F C eandem habere rationem, quam habet D E ad E C.

Demonstratio.

QUoniam angulus A B C per rectam B F bisectus
a 3.sexti. est, igitur ut [a] A B ad B C, ita est A F ad F C; sed ut A B ad B C, ita est B D ad B A, hoc est B D ad B E, adeoque ut A F ad F C, ita B D ad B E. Sed B D est ad B E ut B E ad B C, & dividendo C E ad E D ut B E ad B D, & invertendo D E ad E C ut B D ad B E, hoc est A B ad B C, hoc est H F ad F C,

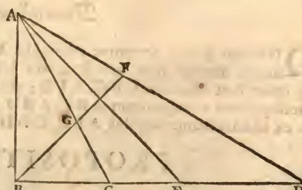


PROPOSITIO LXVII.

IIsdem positis: Dico rationes C B ad A B; A B ad B D; G B ad F B; C G ad G A; A F ad F D tum inter se, tum rationi A C ad A D æquales esse.

Demonstratio.

OB triangulorum A B C, A B D
a 4.sexti. similitudinem, [a] rationes C B ad A B, A B ad B D; A C ad A D æquales sunt. Sed etiam ob similitudinem triangulorum rationes C G B, F B A æquales sunt rationi C G ad A F,
b ex 63. hujus. [b] hoc est A F ad F D; G B ad F B; C B ad A B, hoc est A C ad A D. Denique cum B F dividat angulum A B C bifariam,
c 3.sexti. [c] erit A F ad F D ut A B ad B C, hoc est A C ad A D: Patet igitur veritas propositionis.



PROPOSITIO LXVIIJ.

IIsdem manentibus: Dico rationem D B C duplicatam esse rationis F B G.

Demonstratio.

a 58.hujus CUm [a] proportionales sint B D, B E, B C, ratio D B ad B C duplicata est rationis E B ad B C, hoc est A B ad B C. Quia vero angulus A B D divisus
b per præcedentem. est bifariam per rectam B F, [b] erit B F ad B G ut A B ad B C; igitur etiam ratio D B ad B C duplicata est rationis F B ad B G.

PRO-

PROPOSITIO LXIX.

ISdem manentibus: Dico rationem FD ad GC duplicatam esse rationis DB ad AB vel FB ad BG.

Demonstratio.

PEr 67. hujus CG est ad GA ut AF ad FD igitur (cum GA, AF æquales sint) proportionales sunt rectæ GC, AF, FD, & ratio GC ad FD duplicata est rationis AF ad FD, hoc est [a] AB ad BD, & invertendo ratio FD ad GC duplicata est rationis DB ad AB, [b] hoc est FB ad BG. a 3. sexti. b 67. hujus

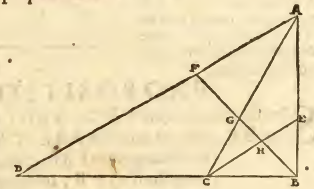
Corollarium.

EX dictis colliges rationem DF ad GC æqualem esse rationi DB ad BC, & tam rationem DF ad GC quam DB ad BC duplicatam esse rationis DB ad AB, hoc est DB ad BE, hoc est DE ad EC, hoc est DF ad AF, hoc est AG ad GC, &c.

PROPOSITIO LXX.

SInt ABC, ABD similia triangula, & BF bisecans angulum ABD, & ponatur CE, quæ sit parallela BD:
Dico FB, GB, HB lineas proportionales esse.

Demonstratio.



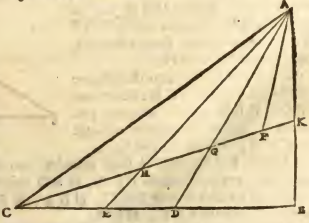
OStensum est [a] rationem DB ad BC dupliplicatam esse rationis FB ad BG: Quia vero EC parallela est AD, [b] ratio FB ad BH æqualis est rationi DB ad BC, igitur ratio FB ad BH duplicata est rationis FB ad BG, adeoque [c] proportionales sunt FB, GB, HB: Quod fuit demonstrandum.

a 68. hujus
b 2. sexti.
c ex def. 10. quinti.

PROPOSITIO LXXI.

SInt denuo duo similia triangula ABC, ABD, & BE æqualis AB, Ducaturque quævis CK, & fiat ACK angulo æqualis angulus GAF:
Dico FG, FH, FC lineas proportionales esse.

Demonstratio.



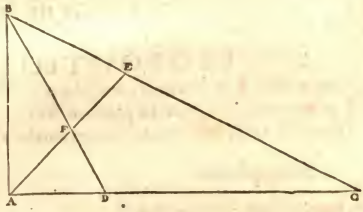
SImilia sunt triangula FAG, FAC, quod patet ex angulis, estque angulus FAH æqualis angulo AHF, nam angulus AHF æqualis est duobus CAH & HCA; Est autem CAH angulus æqualis angulo HAG ex constructione sicut & angulus GAF angulo ACH, igitur linea AF æqualis est lineæ FH, unde proportionales sunt lineæ FG, FH, FC.

PROPOSITIO LXXIJ.

SInt iterum similia triangula ABC, ABD, & AE bisecans angulum BAC:

Dico { AEAB, AF AC
AEAD, AF AB
AE EB, AF EC
AE BD, AF BC
ABEC, ACEB
AB BE, AD EC
AB BC, AC BD
AB BD, AD BC &c. } Rectangula æqualia esse.

Demonstratio.



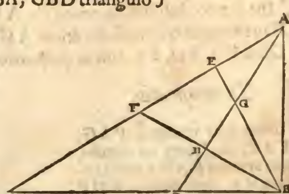
a 67 hujus. REcta a AE est ad AF ut AC ad AB, igitur AEAB rectangulum æquale est rectangulo AF AC per 16. sexti Eucl.& per eandem rectangulum AE AD æquale est AF AB rectangulo, cum AE sit ad AF ut AB ad AC: & sic de ceteris: vide propositionem 67. hujus.

PROPOSITIO LXXIIJ.

SInt similia triangula ABC, ABD, & ex angulo communi ductæ sint BE, BF, ut angulos ABE, CBF æquales constituant.

Dico triangulum FBE, triangulo GBH
triangulum CFB, triangulo AGB
triangulum EBA, HBD triangulo
triangulum EBC, HBA triangulo
denique triangulũ FBA, GBD triangulo } simile esse.

Demonstratio.



a 32. primi. 1. ANgulus FEB a æqualis est angulis EAB, ABE simul sumptis, hoc est angulis HDB, DBH, hoc est angulo GHB; angulus autem EBF est communis, igitur similia sunt triangula FBE, GBH.

2. Angulus GAB ex constructione æqualis est angulo FCB: Sed etiam ABG, HBD anguli æquales ponuntur; igitur triangula quoque que CFB, AGB similia sunt.

3. Anguli EAB, HDB sunt æquales, uti & anguli EBA, HBD ex constructione, ergo triangula EBA, HBD similia sunt.

4. Æquales sunt anguli EBC, HBA, & ECB, HAB: igitur similia quoque sunt triangula EBC, HBA.

5. Denique anguli FAB, GDB æquales sunt, uti & anguli FBA, GBD, patet igitur etiam triangula FBA, GBD esse similia.

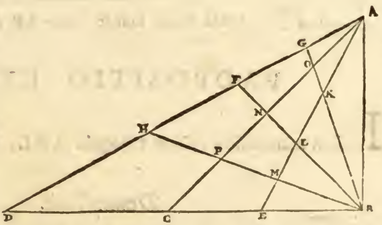
PRO-

PROPOSITIO LXXIV.

POsitis similibus triangulis A B E, A B D, ponatur C A, quæ angulos D A C, C A E, æquales efficiat; deinde ex puncto B ductæ sint lineæ B F, B G, B H, ut recta B F angulos A B D, G B H bifariam dividat.

Dico { triangulum H B F triangulo K B L; triangulum G B F triangulo M B L; triangulum H A P triangulo K A O; triangulum M A P triangulo G A O; triangulum E B L triangulo F B A; triangulum D B F triangulo A B L } simile esse.

Demonstratio.



PAtet per 64. hujus angulum A F B æqualem esse E L B, igitur [a] etiam K L B, H F B anguli æquales sunt. Sed ex constructione etiam anguli H B F, K B L æquales sunt, ergo triangulum H B F simile est K B L triangulo.

Hinc etiam patet triangula G B F, M B L similia esse.

Deinde quia triangula H B F, K B L similia sunt, & anguli A H B, L K B, [b] hoc est A K O, æquales sunt, uti & anguli H A P, O A K ex constructione, sequitur triangula H A P, K A O similia esse.

Quia vero hæc triangula H A P, K A O similia sunt, & angulus H P A æqualis angulo K O A, erit quoque [c] angulus A P M æqualis angulo G O A; cum igitur anguli P A M, O A G æquales sint, ex constructione, erunt quoque triangula M A P, G A O similia.

De triangulis E B L, F B A & triangulis D B F A B L vide propositionem 64. hujus.

a deducitur ex 13 primi

b 15. primi.

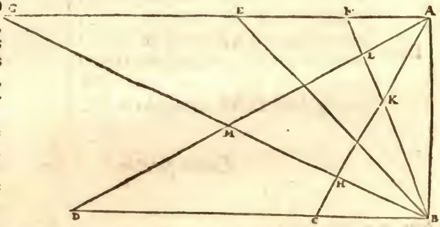
c ex 18. primi.

PROPOSITIO LXXV.

SInt similia triangula A B C, A B D, & A E parallela B D & B E bisecans A B D, F B G angulos:

Dico rectas A F, A E, A G proportionales esse.

Demonstratio.



QUoniam rectæ A E, B D parallelæ sunt, [a] igitur angulus A E B æqualis est angulo E B D, hoc est ex constructione A B E, Isosceles itaque est triangulum A B E, Sed B E ex constructione bisecat angulum F B G, igitur [b] triangula A B F, A B G similia sunt & [c] rectæ A F, A E, A G proportionales

a 28. primi

b 60 huius

c 57. huius

PROPOSITIO LXXVI.

IIsdem manentibus: Dico triangula A B L, A H G similia esse.

Demonstratio.

CUm anguli A B F, G B C ex constructione æquales sint, uti & anguli A C B, B A D, similia sunt triangula A B L, B H C. Sed triangula B H C, A H G similia sunt (cum anguli A H G, B H C æquales sint: uti anguli H A G, H C B, & anguli A G H, H B C) igitur etiam triangula A L B, A H G similia sunt.

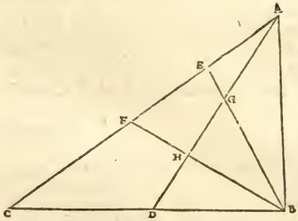
PROPOSITIO LXXVII.

POsitis iterum similibus triangulis A B C, A B D, ductisque rectis B E, B F, quæ angulos æquales efficiant cum rectis A B, B C:

Dico rationes F B ad B G; E B ad B H; E F ad G H, C F ad G A, A E ad D H, B C ad A C ad A B tum inter se tum rationi C A ad A D æquales esse.

Demon-

Demonstratio.



TRiangula [a] C F B, A B G similia demonstrata sunt; igitur [b] rationes F B ad B G, C F ad G H, C B ad B A, hoc est C A ad A D æquales sunt. Sed etiam rationi C B ad B A, hoc est C A ad A D æquales sunt rationes E B ad B H, A E ad D H, cum etiam [c] similia sint triangula E B A, B H D. Denique cum similiter [d] triangula F B E, G B H ostensa sint similia, ratio E F ad B H eadem est cum ratione F B ad B G, hoc est C A ad A D, ut jam ostendimus, igitur rationes F B ad B G, E B ad B H, E F ad G H, C F ad G A, A E ad D H tum inter se tum eidem rationi C A ad A D æquales sunt.

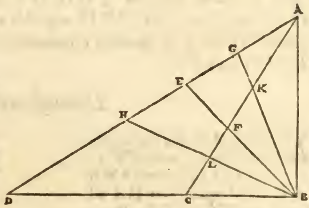
a 73. *hujus*
b 4. *sexti.*
c 73 *hujus.*
d *Ibidem.*

PROPOSITIO LXXVIIJ.

SIt triangulum A B C simile A B D triangulo, & B E bisecans angulos A B D, G B H:

Dico rationes H E ad K F, G E ad F L, tum inter se tum rationi D A ad A C æquales esse.

Demonstratio.



QUia [a] triangulum H B E simile est K B F triangulo, erit H E ad K F ut E B ad B F, hoc est [b] D A ad A G, hoc est [c] H G ad K L; igitur etiam [d] ratio G E ad F L æqualis est rationi H G ad K L, hoc est D A ad A C.

a 74. *hujus*
b 67. *hujus*
c 77. *hujus*
d 19. *quinti*

Corollarium.

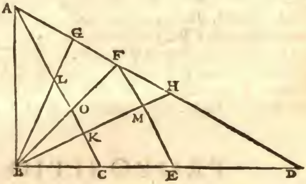
PAtet ex duabus ultimis propositionibus in triangulis similibus A B C, A B D, si recta B E bisecat angulos A B D, G B H, inveniri duodecim rationes tum inter se tum decimæ tertiæ æquales; nempè rationes A B ad B C, B D ad B A, E B ad B F, A F ad F C, D E ad E A, H B ad B K, G B ad B L, H G ad K L, D H ad A K, A G ad L C, H E ad K F, G E ad F L quæ omnes tum inter se tum rationi D A ad A C æquales sunt.

PROPOSITIO LXXIX.

SImilia ponantur triangula A B C, A B D, ducanturque B F, B H, B G, ut B F tam angulum A B D quam G B H angulum bifariam partiatur:

Dico rationem H A ad A K eandem esse cum ratione H B ad B G.

Demonstratio.



a 4.*sexti.* b 29.*primi* c *ex* 63. *hujus.*

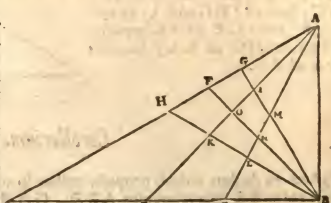
FIat rectæ A C parallela F E,[a] erit ratio H A ad A K eadem cum ratione H F ad F M. Sed[b] angulus M F B æqualis est angulo A O F, [c] hoc est A F O, & angulus G B F ex constructione æqualis est angulo F B M, igitur triangula G B F, M B F, habentia latus B F commune similia & æqualia sunt, estque recta G F rectæ F M æqualis; quare ut H F ad F M, hoc est ut H A ad A K, ita H F ad F G, & ut H F ad F G ita H B ad B G; igitur rationes H A ad A K, H B ad B G æquales sunt.

PROPOSITIO LXXX.

IN similibus triangulis A B C, A B D, positæ sint rectæ B F, A E, quæ singulos angulos A B D, D A C bisecent, ducanturque B G B H, ut angulos G B F, F B H æquales exhibeant.

Dico H F ad F G eandem continere rationem quam habet H K ad K L & M I ad I G.

Demonstratio.



a 3.*sexti.* b *per præcedentem.* c 3.*sexti.* d 76.*hujus* e *ex* 4 *sexti* f *vide sequentem.*

QUoniam A E bisecat angulum H A L, [a] erit H K ad K L ut H A ad A L, hoc est [b] H B ad B G: Sed etiam [c] ut H B ad B G ita est H F ad F G. Patet igitur H F esse ad F G ut H K ad K L. Quia vero [d] similia sunt triangula L A K, A I G erit [e] L K ad I G ut L A ad A G, & ob eandem rationem H K est ad I M ut H A ad A M, [f] hoc est L A ad A G; igitur H K est ad M I ut K L ad I G & permutando ut H K ad K L ita M I ad I G.

PROPOSITIO LXXXI.

ISdem manentibus: Dico rationes HA ad AM, HK ad MI, LA ad AG, KL ad GI, HL ad GM æquales esse.

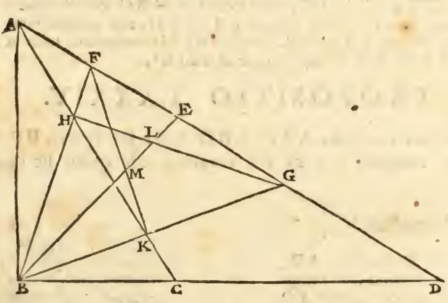
Demonstratio.

PEr 74. hujus triangula HAK & MAI similia sunt, [a] igitur ut KA ad AI, ita HA ad AM, & HK ad MI: Sed etiam [b] similia sunt triangula AGI, AKL, igitur sicut KA ad AI, ita LA ad AG, & LK ad GI: sunt itaque similes rationes seu æquales KA ad AI, HA ad AM, HK ad MI, LA ad AG & KL ad GI. Quia vero est HK ad MI, ut KL ad GI, erit quoque [c] ut KH ad MI ita HL ad MG, patet igitur veritas propositionis.

a ex 4. sexti
b 74. hujus
c 12. quinti

PROPOSITIO LXXXIJ.

SInt similia triangula ABC, ABD, & BE bisecet angulos ABD, FBG, & jungantur H, G; K, F: Dico FM ad MK esse ut GL ad LH.



Demonstratio.

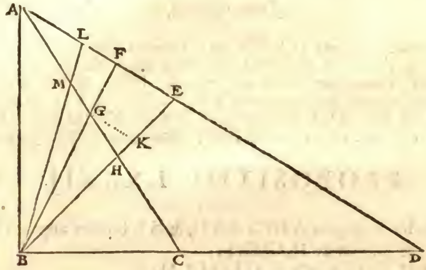
UT est GB ad BH, ita est [a] FB ad BK, Sed cum angulus FBG divisus sit bifariam, ut [b] GB ad BH ita est GL ad LH; & FM est ad MK ut FB ad BK, hoc est GB ad BH. Patet igitur FM esse ad MK ut GL ad LH.

a 77. hujus
b 3. sexti

PRO-

PROPOSITIO LXXXIIJ.

SInt ſimilia triangula A B C, A B D & B E biſecans angulum rectum, & inter B E, B A ponatur B F:
Dico quod ratio F B ad B G minor ſit ratione E B ad B H.



Demonſtratio.

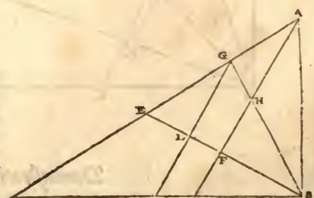
a 2. *ſexti.* b 8. *quinti.* POnatur G K parallela A D, erit [a] ratio F B ad B G æqualis rationi E B ad B K, quæ cum ſit [b] minor ratione E B ad B H, erit quoque ratio F B ad B G minor ratione E B ad B H. Similiter ſi L M conſtituatur inter A B, B F, erit ratio B L ad B M minor ratione F B ad B G.

PROPOSITIO LXXXIV.

IN ſimilibus triangulis A B C, A B D ductæ ſint quævis B E, B G:
Dico rationem E B ad B F majorem eſſe quam ſit ratio G B ad B H.

Demonſtratio.

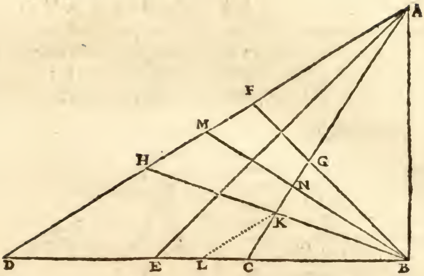
a 8. *quinti.* b 2. *ſexti.* POnatur G K parallela A D, occurrens B E in L, erit [a] ratio E B ad B F major ratione L B ad B F: igitur cum ratio L B ad B F [b] æqualis ſit rationi G B ad B H, etiam ratio E B ad B F major eſt quam ratio G B ad B H.



PROPOSITIO LXXXV.

TRiangulo A B D inſcriptum ſit A B C ſimile triangulum, & B F biſecans angulum rectum, & inter B F, B D poſita quævis B H.
Dico tam rationem H B K quam F B G, minorem eſſe quam ſit ratio D B C.

Demon-



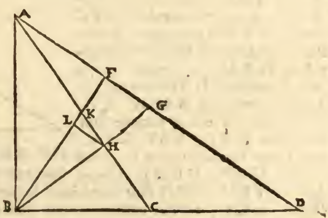
Demonstratio.

POnatur KL parallela A D erit triangulum ACD simile K C L triangulo,& ratio H B ad B K æqualis rationi D B ad B L, sed [b] ratio D B ad B C major est ratione D B ad B L, igitur ratio D B ad B C major est ratione H B ad B K. Ostensa est autem [c] ratio H B ad B K major ratione F B ad B G; igitur & ratio D B ad B C multo major est ratione F B ad B G. Idem intellige de quâvis lineâ M B collocatâ inter F B & B H, quod ratio M B ad B N minor sit quam ratio D B ad B C.

a 2. sexti.
b 8. quinti
c 84. hujus

Corollarium.

SEquitur ex his propositionibus si ducatur in similibus triangulis, ex angulo recto, recta B G, eo rationem B G ad B H majorem esse, quo magis accedit recta B G ad rectam B D. Unde ulterius sequitur rationem G B ad B H non posse secundo exhiberi, per rectam ex puncto B ductam, occurrentem lineis A C, A D Ponatur enim si fieri possit alia linea, puta B F, sitque ratio F B ad B K æqualis G B H, & ex H ducatur H L parallela

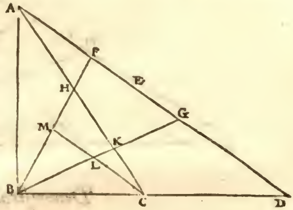


rectæ A D, erit ut C B ad B H ita F B ad B L. Sed ex suppositione est G B ad B H, ut F B ad B K, igitur recta H L eadem est cum recta H K, & H K rectæ A D parallela, quod fieri nequit.

PROPOSITIO LXXXVI.

IN ſimilibus triangulis A B C, A B D ex puncto B poſitæ ſint duæ lineæ B F, B G conſtituentes æquales angulos cum rectis A B, B C; deinde ex puncto C poſita ſit recta C M parallela A D:

Dico B G, B H, B L proportionales eſſe; uti & B F, B K, B M.



Demonſtratio.

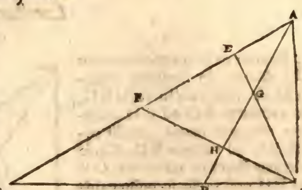
a 2. ſexti.
b ex 68. & 77. huius.
c ex def. 10. quinti.

QUoniam C M ex conſtructione æquidiſtat rectæ A D, [a] rationes D B ad B C, & B G ad B L æquales ſunt. Sed ratio D B ad B C duplicata eſt rationis G B ad B H, igitur etiam ratio G B ad B L duplicata eſt rationis G B ad B H, adeoque [c] G B, B H, B L proportionales ſunt. Eodem diſcurſu oſtenditur rectas B F, B K, B M proportionales eſſe.

PROPOSITIO LXXXVII.

SInt iterum in ſimilibus triangulis A B C, A B D, duæ rectæ ex puncto B eductæ, æquales angulos cum lineis A B, B C continentes: Dico A C diviſam eſſe in E & F ſecundum eandem rationem, quâ diviſa eſt A D in H & G.

Demonſtratio.



a 73. huius

EX conſtructione ſimilia ſunt triangula A B C, A B D, & anguli A B G, F B C æquales ex conſtructione; igitur [a] triangulum B F C ſimile eſt A B G triangulo: & ſimiliter triangulo F B E ſimile eſt triangulum G B H, triangulo autem A B E ſimile eſt D B H triangulum. Igitur triangula A B G, G B H, H B D ſunt in eadem ratione cum triangulis G B F, F B E, E B A, C

b 1. ſexti.
c per eandem.

quę [b] cum ſint in ratione linearum C F, F E, E A, erunt quoque triangula A B G, G B H, H B D in ratione linearum C F, F E, E A. Sed triangula A B G, G B H, H B D ſunt in ratione linearum A G, G H, H D, igitur rectæ A G, G H, H D in eadem ratione ſunt cum rectis C F, F E, E A: Patet itaque A C, A D lineas ſimiliter diviſas eſſe.

PROPOSITIO LXXXVIII.

IIſdem manentibus: Dico

Rectangula C B G, F B A	æqualia eſſe
Rectangula E B G, F B H	
Rectangula F C H D, G A E	
Rectangula F A E, H A G	
Rectangula F A G, G D F C	

Demon-

Demonstratio.

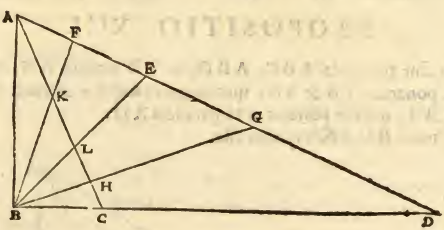
PEr 77. hujus CB est ad BA ut FB ad BG, igitur per 16. lib. 6 Elem: rectangulum CBG æquale est FBA rectangulo. Similiter ex iisdem propositionibus ostenditur rectangula EBG, FBH æqualia esse, rectangulum item FCHD æquale GAE rectangulo &c. Rectangulum autem FAG æquale esse GDFC rectangulo sic demonstro. [a] Recta AC divisa est secundum eandem rationem, quâ divisa est AD, igitur prima AE est ad secundam CF, ut tertia DH ad quartam AG, & quinta FE est ad secundam FC, ut sexta GH ad quartam AG, igitur [b] composita AEF eandem habet rationem ad FC, quam habet composita DHG ad AG, igitur rectangulum FAG æquale est GDFC rectangulo.

a per præcedentem.
b 24. quin.

PROPOSITIO LXXXIX.

SIt in similibus triangulis recta BE bisecans angulos ABD, FBG:

Dico { Rectangula GBL, EBK / Rectangula FBL, EBH / Rectangula GELH, FEKL } æqualia esse.



Demonstratio.

QUoniam similia sunt triangula ABC, ABD & anguli ABC, FBG bisecti per BE rectam, [a] similia sunt triangula GBE, KBL, igitur [b] GB est ad BE ut BK ad BL; patet itaque [c] rectangula GBL, EBK æqualia esse. Similiter triangula FBE, HBL similia sunt, igitur FB est ad BE, ut BH ad BL, adeoque æqualia etiam sunt rectangula FBL, EBH. Denique quia GE est ad KL, ut EF ad LH, æqualia sunt rectangula GELH; FEKL.

a 74 hujus
b 4. sexti.
c 16. sexti.

Si quis plures rectangulorum combinationes desiderat, consulat propositiones præmissas in quibus rationes inter se æquales attulimus.

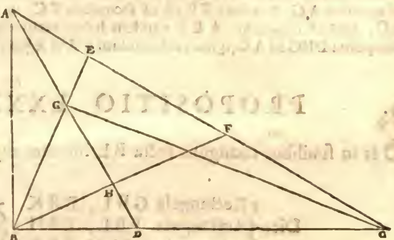
PROPOSITIO XC.

SI triangula A B C, A B D similia sint, & rectæ B E, B F angulos æquales efficiant cum rectis A B, B C; ductaque sit recta C G: Dico triangula B G C, A B F æqualia esse.

Demonstratio.

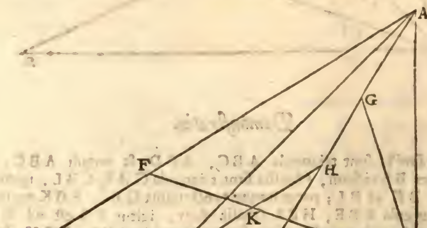
a 88. *hujus* b *Clavius ex Command: in Schol. prop: 23. sexti. Elem:*

REctangulum C B B G [a] æquale est rectangulo B A B F; Angulus autem A B F æqualis est C B G angulo (cum ex constructione æquales sint A B E, F B D, sitque G B H communis) igitur [b] triangulum A B F est ad triangulū G B C, ut rectangulum C B B G ad A B B F rectangulum, quæ rectangula cum æqualia sint, erunt quoque triangula A B F, C B G æqualia.



PROPOSITIO XCI.

SImilia sint triangula A B C, A B D, & E B æqualis B A, & ductâ A E, ponantur F B & B G, quæ æquales angulos efficiant cum rectis B D, B A, deinde ponatur E H parallela A D: Dico lineas B G, B K æquales esse.



Demonstratio.

a 77. *hujus* b 2. *sexti.* c 9. *quinti.*

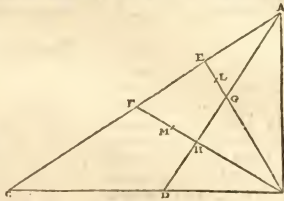
EX constructione similia sunt triangula A B C, A B D, & anguli A B G, F B D æquales, igitur [a] ut D B ad A B, hoc est B E, ita est F B ad B G. Quia vero E H est parallela A D, [b] B D est ad B E ut F B ad B K, igitur F B est ad B K, ut F B ad B G, [c] unde rectæ B G, B K æquales sunt.

PRO-

PROPOSITIO XCII.

Sint in similibus triangulis A B C, A B D duæ rectæ ex puncto B eductæ B E, B F, quæ cum lineis A B, B C angulos æquales constituant, & fiant proportionales F B, M B, H B, uti & E B, L B, G B.

Dico M B ipsi L B æqualē esse.



Demonstratio.

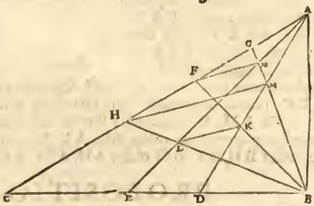
Ostendimus [a] rectangula F B H, E B G æqualia esse, sed [b] rectangulo F B H æquale est quadratum B M, & rectangulo E B G æquale quadratum B L; cum igitur rectangula inter se sint æqualia, etiam quadrata B M, B L æqualia sunt, atque adeo lineæ M B, L B æquales.

a 88. *hujus*
b 17. *sexti.*

PROPOSITIO XCIIJ.

Positis similibus triangulis A B D, A B C, & ductâ rectâ B F quæ bisecat angulos A B C, G B H, ducantur N F, M H, K L:

Dico illas inter se parallelas esse.



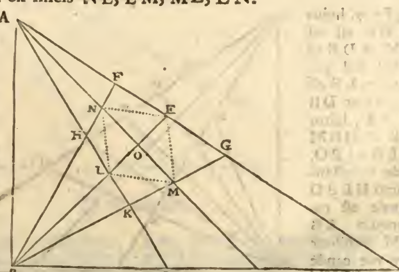
Demonstratio.

Per 80. hujus H F est ad F G ut M N ad N G; igitur per 2. sexti patet N F, M F ductas, parallelas esse. Similiter ostenditur M H, K L æquidistantes esse.

PROPOSITIO XCIV.

Sint eadem quæ prius, hoc est triangula similia A B D, A B C, & anguli A B E, E B D, & F B E, E B G æquales: Dico parallelogrammum esse quod fit ex lineis N E, E M, M L, L N.

Demonstratio.



Quoniam angulus A B D bisectus est, uti & angulus D A C, igitur [a] angulus A O B rectus est, angulus autem N B O æqualis est O B M; [b] simile igitur est triangulum N B O triangulo O B M, & quia latus B O commune est, erunt lineæ N O, O M æquales. Sed etiam [c] æquales sunt lineæ L O, O E, & anguli M O L, L O N, N O E, E O M æquales, igitur similia & æqualia sunt triangula L O N, N O E, E O M, M O L, unde & bases M L, L N, N E, E M æquales sunt, per præcedentem autem parallelæ sunt N E, L M; patet igitur lineas N E, E M, M L, L N parallelogrammum constituere.

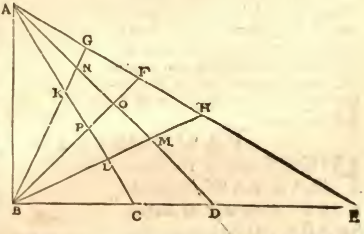
a ex 63. *hujus.*
b 26. *primi*
c 63. *hujus*

PROPOSITIO XCV.

SInt triangula, rectangula A B C, A B E ſimilia, & A B æqualis B D & B F biſecans angulum rectum A B E; ſit autem angulo E A C æqualis angulus G B H, quem etiam bipartiatur recta B F:

Dico lineas B H, B F, B G æquales eſſe lineis A H, A M, A L.

Demonſtratio.



QUoniam angulum rectum biſecat recta B F, in triangulo Iſoſcelio rectangulo A B C, erit [a] angulus A O B rectus, adeoque angulo A B O ſemirecto æqualis angulus B A O. Quia vero anguli E A C, G B H æquales ſunt ex conſtructione, & uterque biſectus, æquales quoque ſunt anguli C A D, G B F, & E A D, F B H. Unde totus angulus B A E æqualis eſt angulo A B H, æquales itaque ſunt lineæ A H, B H. Quia vero etiam æquales ſunt anguli B A D, A B F, ſimilia & æqualia ſunt triangula A B F, B A M adeoque B F æqualis eſt rectæ A M. Denique quia ſimilia ſunt triangula & æqualia A B G, B A L, æquales quoque ſunt rectæ B G, A L. Patet igitur veritas propoſitionis nempe rectas B H, B F, B G rectis A H, A M, A L æquales eſſe.

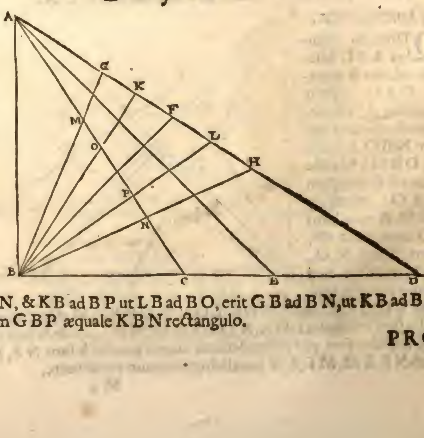
[a] *Clavius ad 26. primi.*

PROPOSITIO XCVI.

SEcet in ſimilibus triangulis A B C, A B D recta B F angulos A B C, G B H, K B L bifariam:

Dico rectangula H B O, L B M, & rectangula G B P, K B N æqualia eſſe.

Demonſtratio.



PEr 77. hujus H B eſt ad B M ut D B ad B A: Sed per eandem L B eſt ad B O ut D B ad B A, igitur H B eſt ad B M ut L B ad B O, unde [a] rectangulum H B B O æquale eſt rectangulo L B B M. Similiter cum per eandẽ 77. G B ſit ad B N ut H B ad B N, & K B ad B P ut L B ad B O, erit G B ad B N, ut K B ad B P, igitur rectangulum G B P æquale K B N rectangulo.

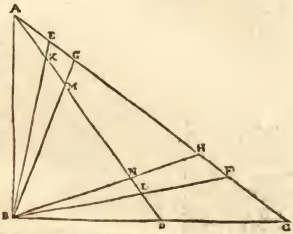
[a] *16. ſexti.*

PRO-

PROPOSITIO XCVIJ.

SI iterum in similibus triangulis A B C, A B D binæ lineæ ponantur E B, B F pares angulos cum extremis lineis A B, B C continentes: similiter aliæ binæ ponantur G B, B H, ut anguli G B E, H B F æquales sint: Dico rectangulum sub H F & L N, rectangulo sub E G & K M comprehenso æquale esse.

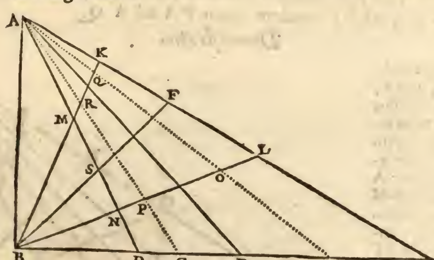
Demonstratio.



Similia iterum ponuntur triangula A B G, A B D, & similiter secta sunt per lineas F B, B E, & H B, B G propter angulos, qui ex constructione facti sunt æquales; unde etiam [a] lineæ A C, A D similiter sectæ sunt, adeoque F H est ad G M, ut K M ad N L, ac proinde [b] rectangulum sub H F & N L æquale est sub E G & K M rectangulo. a 87. hujus b 16. sexti.

PROPOSITIO XCVIIJ.

SIt Isosceles A B E & similia triangula A B C, A B D, & B F bisecans angulos A B C, K B L: ponantur deinde A G, A H quæ angulos æquales constituant cum lineis A D, A C: Dico rectangulum L B N ad O B P eandem sortiri rationem, quam habet rectangulũ K B M ad Q B R rectangulum.



Demonstratio.

DEmonstratum est [a] rectangulum L B N, K B M rectangulo æquale esse, quia similia sunt triangula A B C, A B D, & anguli L B C, A B K æquales. Sed etiam [b] triangula A B G, A B H similia sunt, cum A B E Isosceles sit, & A E dividat angulum G A H bifariam. Igitur rectangula O B P, Q B R æqualia sunt; unde patet rectangulum L B N esse ad O B P rectangulum, ut rectangulum K B M ad Q B R rectangulum. a 88. hujus b 59. hujus

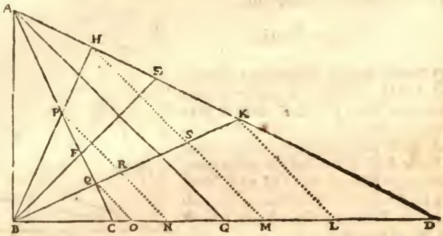
PRO-

PROPOSITIO XCIX.

SInt ſimilia triangula A B C, A B D, & A B æqualis B G, & B E biſecans angulos A B D, H B K; ponantur inſuper K L, H M, P N, Q O, quæ æquidiſtent A G.

Dico L B O rectangulum, rectangulo M B N æquale eſſe.

Demonſtratio.



Quoniã parallelæ ſunt rectæ HM, AG, PN ex conſtructione & ABG triangulum Iſoſceliũ, erunt Iſoſcelia triangula HBS, PBR & HB æqualis BS, & P B æqualis B Q; adeoque K B ad BS, ut KB ad BH, & R B ad B Q ut P B ad B Q. Sed [a] K B eſt ad B H ut P B ad B Q igitur ut K B ad B S ita B R ad B Q, hoc eſt K L ad S M ut R N ad Q O, hoc L B ad B M ut N B ad B O; igitur patet rectangulum L B O æquale eſſe M B N rectangulo.

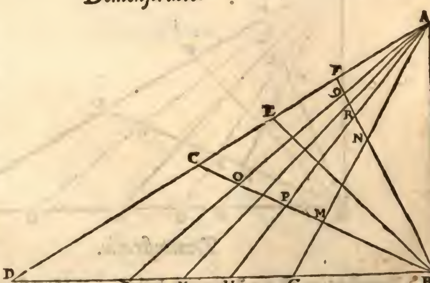
a permutando 77. hujus.

PROPOSITIO C.

SInt iterum ſimilia triangula A B G; A B D, & angulos F B C, A B D bifariam dividat B E, ſitque recta A B æqualis B K, ſecet inſuper A K angulos G A D, H A L bifariam.

Dico C A ad A N eandem obtinere rationem, quam habet O A ad A R, & M A ad A F eandem quam P A ad A Q.

Demonſtratio.



a 73. hujus

SImilia ſunt [a] triangula C B F, N B M; angulus autem B N M æqualis eſt angulo A C B; igitur etiam angulus A N F, hoc eſt B N M, æqualis eſt angulo A C B; angulus vero N A F communis eſt duobus triangulis N A F, M A C. Igitur ſimilia ſunt triangula A N F, A M C, & ſimili diſcurſu ſimilia demonſtrantur triangula R A Q, P A O; & quia anguli N A R, C A O æquales ſunt uti & anguli A N R, A C O, ſimilia ſunt triangula N A R, O A C; unde [b] A C eſt ad A N, ut A O ad A R. Similiter oſtenditur triangula M A P, Q A F ſimilia eſſe, ac proinde rationem M A ad A F eandem eſſe cum ratione P A ad A Q. Quod fuit demonſtrandum.

b 4. ſexti.

PRO-

PROPOSITIO CI.

Iisdem manentibus: Dico C M ad F N eandem obtinere rationem, quam habet O P ad Q R.

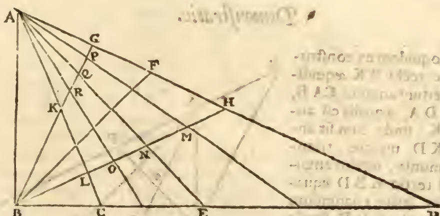
Demonstratio.

Quia similia sunt triangula M A C, N A F, sicut etiam similia sunt triangula P A O, R A Q; ratio C M ad F N eadem est cum ratione C A ad A N, & ratio O P ad Q R eadem cum ratione O A ad A R. Sed per præcedentem ratio C A ad A N eadem est cum ratione O A ad A R, igitur C M ad F N est ut ratio O P ad Q R.

PROPOSITIO CIJ.

Sit Isosceles A B E & similia sint triangula A B C, A B D, & recta A E bisecet angulos C A D, O A M, recta vero B F bifariam dividat angulos A B D, G B H.

Dico ut recta H L est ad K G, ita esse H M ad K R, M N ad R Q, &c.



Demonstratio.

Ut H L ad K G ita est H A ad A K, cum sint similia triangula L A H, & G A K: sed ut H A ad A K, ita quoque H M ad K R (cum etiam triangula H A M, K A R similia sint) igitur ut H L ad K G ita est H M ad K R. Sed ut H A ad A K ita quoque M A ad A R, utque M A ad A R, ita M N ad R Q ob eandem rationem; igitur manifestum est, quod etiam M N sit ad R Q, ut H L ad K G, & sic de cæteris, si plures lineæ inter A M, A O ducerentur constituentes cum recta A E angulos æquales.

N DE

DE FIGURIS TRIANGULARIBUS

PARS TERTIA

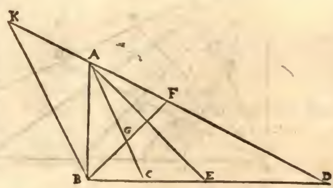
Angulorum bisectiones, Rationes proportionales & in invicem ductas, denique proportiones simplices complectitur.

PROPOSITIO CIIJ.

SImilia supponantur triangula A B C, A B D, sitque A B recta æqualis B E, & rectæ A C ponatur parallela B K, donec occurrat D A productæ in K.

Dico triangulum A K B triangulo K B D simile esse.

Demonstratio.



QUandoquidem ex constructione recta B K æquidistat A C, igitur [a] angulus C A B, hoc est B D A, æqualis est angulo A B K: unde cum sit angulus B K D utrique triangulo communis, tertius angulus K A B tertio K B D æqualis est. Patet igitur triangulum A K B triangulo K B D simile esse.

a 29. primi.

PROPOSITIO CIV.

IIsdem manentibus, ducatur B F dividens angulum A B C bifariam,

Dico rectas K F, K B æquales esse.

Demonstratio.

[a] TRiangulum F A G Isoscelium est, & angulus A G F æqualis angulo A F G; quoniam vero A C, K B parallelæ sunt, angulus K B G æqualis est angulo A G F, hoc est A F G, igitur Isosceles quoque est B K F, & K F æqualis rectæ K B.

a ex 63. hujus.

PRO-

PROPOSITIO CV.

Iisdem manentibus: Dico K A, K F, K D proportionales esse.

Demonstratio.

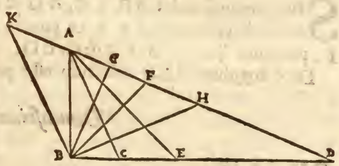
Ex eo quod triangula A K B, K B D similia sunt, rectæ [a] A K, K B, K D proportionales sunt; sed ostensum est [b] rectam K B lineæ K F æqualem esse, igitur etiam sunt proportionales K A, K F, K D. a ex 4. sexti. b 104. hujus.

PROPOSITIO CVI.

Positis, quæ præmissa sunt, ducantur quævis lineæ B G, B H, quarum angulus G B H bisectus sit per rectam B F.

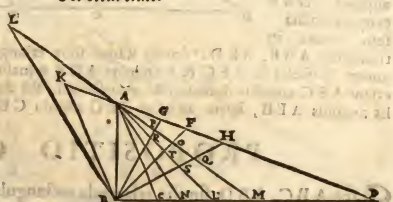
Dico triangula K G B, K B H esse inter se similia.

Demonstratio.



Angulus A B F æqualis est angulo F B D ex constructione, sicut etiam angulus G B F æqualis F B H; igitur angulus A B G angulo H B D æqualis est, & quia angulus A B K æqualis est angulo K D B, hinc duo anguli K B A, & A B G (hoc est angulus K B G) angulis H B D & H D B æquales sunt: unde cum angulus B H K iisdem angulis H B D, B D H æqualis sit, æquales quoque sunt anguli K B G, B H K; igitur cum utrique triangulo K B G, K B H communis sit angulus B K H, residui anguli K G B, K B H æquales sunt, ac proinde æquiangula sunt triangula & similia inter se K B G, K B H.

Corollarium.

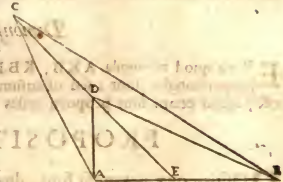


Ex hac propositione colligitur rectas K G, K F, K H proportionales esse, eo modo quo in precedenti collegimus lineas K A, K F, K D proportionales esse.

2. Quoniam premissæ propositiones universales sunt, si in schemate ultimo ducantur rectæ A M, A N constituentes angulos æquales cum lineis A E, & rectæ A N ponatur æquidistans B L, donec occurrat productæ M A in L. Erunt rectæ L O, L B æquales, similia autem triangula L A B, L B M, & triangulum L B P simile triangulo L B Q: denique rectæ L A, L O, L M, uti & L P, L O, L Q proportionales erunt. Occasione autem præsentis schematis fit

PROPOSITIO CVIJ.

Super recta A B ponantur duo triangula A B C, A B D intra se in vicem posita. Dico angulum A D B æqualem esse tribus angulis A C B, C A D, C B D.



Demonstratio.

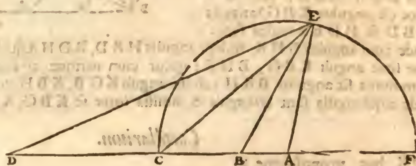
a 32. primi. Ponatur C D E, tunc[a] angulus E D A æqualis est angulis D C A, & D A C, & angulus E D B æqualis angulis D C B, D B C. Patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO CVIIJ.

Sint proportionales A B, A C, A D & centro A, intervallo A C, circulus describatur C E F, & ex puncto quovis in perimetro assumpto E, ponantur lineæ E A, E B, E C, E D:

Dico angulum B E D bisectum esse per rectam E C.

Demonstratio.



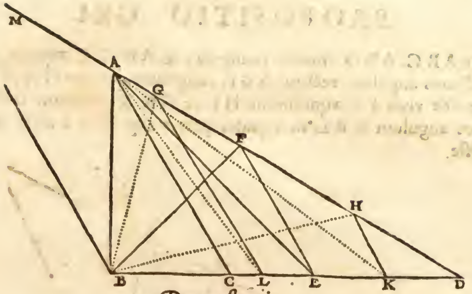
Quoniam A E, A C æquales sunt, igitur proportionales sunt rectæ A B, A E, A D. Circa communem itaque angulum D A E proportionalia sunt latera in triangulis A B E, A E D: [a] similia itaque sunt triangula A E B, A E D. Cum autem Isosceles sit A E C & [b] angulus A C E æqualis duobus C E D, C D E, etiam A E C angulus duobus illis æqualis erit. Est autem angulo E D A æqualis angulus A E B, igitur angulus B E C angulo C E D æqualis est.

a 6. sexti. b 32. primi.

PROPOSITIO CIX.

Sint A B C, A B D similia triangula rectangula & æquales A B, B E, & B F bisecans angulum rectum A B D & acutum G B A, ponantur G L, H K, quæ æquidistent F E, & jungantur A L, A K:

Dico L A K angulum bisectum esse per rectam A E.



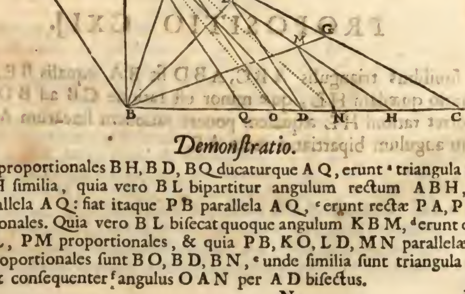
Demonstratio.

POnatur B M, quæ æquidistet A C, [a] hoc est F E, hoc est G L aut H K. Quia igitur B F bisecat angulum G B H, [b] erunt proportionales M G, M F, M H, & consequentur B L, B E (hoc est B A) & B K proportionales sunt, angulus [c] itaque L A K bisectus est. Quod fuit demonstrandum.

a ex 62. hujus.
b coroll. prop: 106. hujus:
c 58. hujus

PROPOSITIO CX.

REctangulo triangulo A B C inscriptum sit Isoscelium A B D, & ductâ quâvis A H inter A C, A D; divisoque bifariam angulo recto A B C & quovis acuto F B G per rectam B E, ex punctis K L M ponantur M N, K O parallelæ L D; & jungantur N A, O A. Dico angulum O A N per rectam A D bisectum esse.



Demonstratio.

FIant proportionales B H, B D, B Q ducaturque A Q, erunt [a] triangula A B Q, A B H similia, quia vero B L bipartitur angulum rectum A B H, [b] erit L D parallela A Q: fiat itaque P B parallela A Q, [c] erunt rectæ P A, P L, P H proportionales. Quia vero B L bisecat quoque angulum K B M, [d] erunt quoque P K, P L, P M proportionales, & quia P B, K O, L D, M N parallelæ sunt, etiam proportionales sunt B O, B D, B N, [e] unde similia sunt triangula A B O, A B N & consequenter [f] angulus O A N per A D bisectus.

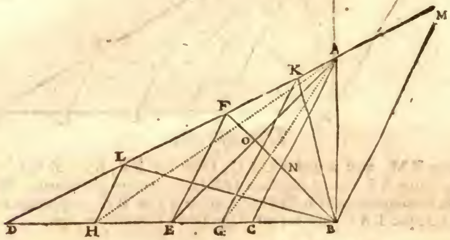
a 60. hujus
b ex 62. hujus.
c 105. hujus
d coroll. prop: 106. hujus.
e 59. hujus.
f 58. hujus.

 PRO-

PROPOSITIO CXI.

SInt ABC, ABD similia triangula, & AB, BE æquales, & BF bisecans angulum rectum ABD, angulum quoque GAH bisecet AE; rectæ vero EF æquidistent HL & GK & ponantur BK, BL.

Dico angulum KBL in æquales partes angulares a recta BF divisum esse.



Demonstratio.

PRoducatur DA ut concurrat cum BM, parallelâ AC, in M. Cum igitur parallelæ sint HL, GK ipsi EF [a] hoc est AC, erunt omnes lineæ AC, KG, FE, LH parallelæ ipsi BM, & consequenter erit recta MD divisa in A, K, F, L sicut recta BD in punctis C, G, E, H. Quia vero sunt proportionales BC, BE, BD, erunt etiam proportionales MA, MF, MD: Quia autem [b] similia sunt triangula MAB, MBD erunt quoque [c] proportionales MA, MB MD, unde MB æqualis est MF. Et quia similiter proportionales sunt BG, BE, BH etiam proportionales erunt MK, MF, ML; cum igitur [d] similia sint triangula MBK, MBL & MB æqualis MF, erit [e] angulus KBL per rectam BF divisus bifariam.

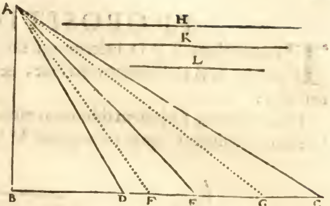
a ex 62. hujus.
b 103. hujus.
c 4. sexti.
d 106. hujus.
e 58. hujus.

PROPOSITIO CXIJ.

IN similibus triangulis ABC, ABD sit BA æqualis BE, & data sit ratio quædam HL, quæ minor est ratione CB ad BD:

Oportet rationi HL æqualem ponere rationem linearum AG, AF, quarum angulum bipartiatur recta AE.

Demon-



Constructio & Demonstratio.

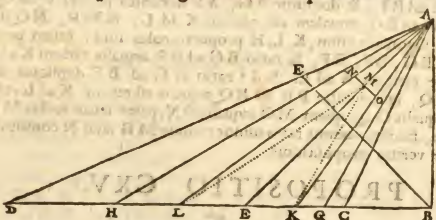
INveniatur recta K media proportionalis inter H & L; quoniam ratio H L ex suppositione minor est ratione C B ad B D, erit ratio H ad K minor ratione C B ad B E (cum B E sit quoque media inter B C & B D) & ratio K ad L minor E B ad B D rationem; fiat igitur ut K ad H, ita B E ad B G, utque K ad L ita B E ad B F, & jungantur A G, A F: Dico factum quod imperatum fuit. Quoniam proportionales sunt H, K, L, erunt quoque ex vi constructionis B G, B E, B F proportionales, [a] & triangula A B G, A B F similia & A G ad A F ut B G ad B F, hoc est H ad L, quia vero B E æqualis est B A in similibus triangulis, [b] angulus G B F bifariam divisus est.

a 57. hujus
b 58. hujus

PROPOSITIO CXIII.

POsitis denuo similibus triangulis ut prius A B C, A B D & ductâ quâvis ratione linearum A H ad A G quarum angulus, bisectus sit a recta A E, quæ bisecat angulum C A D.

Dico ex A puncto duas alias lineas duci non posse, habentes rationem A H ad A G, quarum angulum bifariam partiatur eadem recta A E.



Demonstratio.

TErminentur, si fieri possit, lineæ ex A ductæ in punctis L & K; igitur quoniam recta A E angulum K A L supponitur bisecare, erit [a] ratio L E ad E K eadem cum ratione L A ad A K, hoc est H A ad A G & consequenter eadem cum ratione H E ad E G. Quod si autem ponantur ex punctis L & K rectæ L M, K M, quæ æquidistent H A, A G. Erit [b] ut L E ad H E ita L M ad H A, utque E K ad E G ita K M ad G A. Quia vero L E est ad E K ut H E ad E G ex suppositione, & permutando L E ad H E ut E K ad E G erit quoque L M ad H A ut K M ad G A, & consequenter L M ad L A ut K M ad K A, estque angulus L A M ex suppositione æqualis angulo M A K. [c] similia igitur sunt triangula A M K, A M L, imo [d] & æqualia, cum latus A M sit commune, quod fieri nequit. Dividatur enim angulus A B D bifariam per rectam B F, cui per M ponatur æquidistans N O, erit [e] M N æqualis M O, adeoque æquales altidudines triangulorum; basis autem A L major est quam basis A K. Patet igitur tantum semel quamvis rationem constitui posse juxta mentem propositionis.

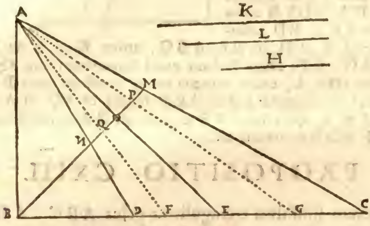
a 3. sexti
b ex 2. sexti
c 7. sexti
d 26. sexti.
e ex 63. hujus.

PRO-

PROPOSITIO CXIV.

Triangulum A B D inscriptum simili A B C, secet B M, quæ angulum A B D bifariam dividat, & A B æqualis sit B E, & jungantur A E:

Dico omnem rationem minorem ratione M B ad B N poni posse per lineas ex A ductas, quæ relinquant M P, N Q æquales lineas.



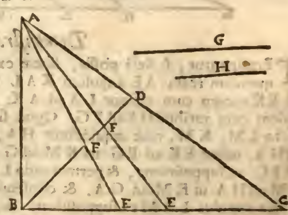
Demonstratio.

Data sit quævis ratio K ad L minor ratione M B N, & fiat H tertia proportionalis ad K & L; deinde fiat ut L ad K ita B E ad B G, utque L ad H ita B E ad B F, & ducantur A G, A F signantes puncta P, & Q: Dico rationem P B ad B Q æqualem esse rationi K ad L, & M P, N Q lineas æquales esse. Quoniam enim, K, L, H proportionales sunt, etiam proportionales erunt B G, B E, B F, & ratio B G ad B F æqualis rationi K ad H, hoc est duplicatę rationis K ad L. Sed [a] ratio B G ad B F duplicata est rationis B P ad B Q, igitur ratio P B ad B Q æqualis est rationi K ad L; est autem tam P O [b] æqualis O Q, quam M O æqualis O N; patet igitur rectas M P, N Q æquales esse, similiter omnis ratio minor ratione M B ad B N constitui potest, patet itaque veritas propositionis.

a 68. hujus

b ex 63. hujus.

PROPOSITIO CXV.



Sit triangulum rectangulum A B C, cujus angulus rectus bisectus sit per B D, & data sit ratio quævis G H:

Oportet ducere rectam ex A, quæ secta per B D, exhibeat rationem G ad H.

Constructio & Demonstratio.

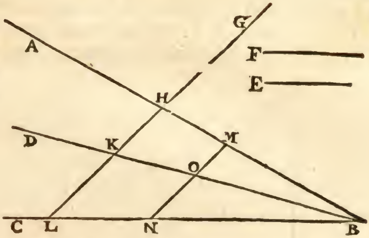
Fiat ut G ad H ita A B ad B E, ducaturque A E dico factum quod petitur. Cum enim angulus A B C bisectus sit per B D erit [a] semper ratio A F ad F E æqualis rationi A B ad B E, hoc est G ad H ex constructione.

a 3. sexti.

PRO-

PROPOSITIO CXVI.

ANgulum A B C bisecet recta B D: Oportet ex dato puncto G extra angulum ponere rectam G L, ut linea H L divisa sit a recta B D in K secundum rationem datam E ad F.



Demonstratio.

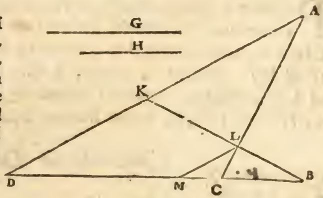
FIat recta B M ad B N ut E ad F, & ductâ M N, ponatur eidem ex puncto G parallela G L: Dico factum quod petitur. Quia enim angulus M B N bisectus est, [a] sicut B M, est ad B N, ita est M O O N: cum vero M N, G L parallelæ sint, constat ex Elementis H K esse ad K L sicut M O ad O N, hoc est E ad F. a 3. sexti.

PROPOSITIO CXVIJ.

EX puncto B, extra angulum D A C, dato oportet ponere rectam B L K, quæ rationem K B ad B L exhibeat, æqualem rationi datæ G ad H.

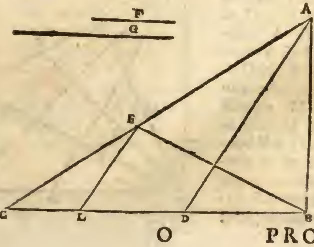
Constructio & Demonstratio.

POsitâ quâvis B D fiat D B ad B M ut G ad H, & ex M ducatur M L parallela D A, & ex B per punctum L ponatur recta B L K; Dico factum quod requiritur. Quoniam parallelæ sunt lineæ D A, M L, [a] erit K B ad B L ut D B ad B M. Sed D B est ad ad B M ut G ad H ex constructione; igitur K B est ad B L ut G ad H. a 2. sexti.



Corollarium.

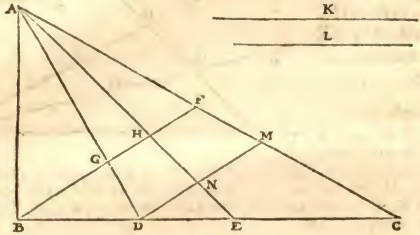
EX hac propositione colligitur, quâ methodo in datis triangulis A B C, A B D similibus ducenda sit recta B E, quæ secetur a recta A D secundum datam rationem G ad F.



PROPOSITIO CXVIIJ.

SIt triangulum rectangulum ABC ſimile ABD triangulo intra ſe poſito, & AB æqualis BE, & data ſit ratio K ad L:

Oportet ponere BF, ut linea intercepta rectis AD, AC, ſcilicet GF, ſecta ſit in H ſecundum rationem K ad L.



Conſtructio & Demonſtratio.

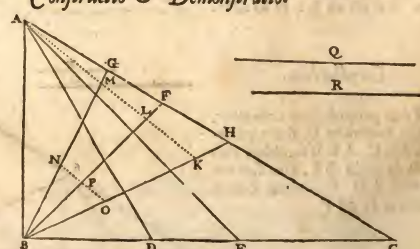
FIat ut L ad K, ita AD ad AM, & rectæ DM parallela ponatur BF, eritque factum quod petitur: Nam cum ſint parallelæ GF, DM, erit GH ad HF, ut DN ad NM, hoc eſt DA ad AM (cum recta AN angulum DAM bifariam dividat) Eſt autem DA ad AM ex conſtructione ut L ad K, igitur invertendo ut K ad L ita eſt FH ad HG.

PROPOSITIO CXIX.

POnantur ſimilia triangula rectangula ABD, ABC, & angulus communis biſectus ſit per rectam BF, & ductæ ſint quævis rectæ BH, BG, æquales angulos cum recta BF formantes, & data ſit ratio Q ad R: Petitur ex puncto A duci recta AK, quæ rationem KL ad LM conſtituat æqualem rationi Q ad R, Quæ minor ſit quam ratio HF ad FG, Et major ratione æqualitatis.

Conſtructio & Demonſtratio.

FIat rationi Q ad R æqualis ratio OB ad BN, & ductâ NO, ex puncto A ponatur AK, quæ æquidiſtet NO; erit exhibita ratio KLM æqualis QR. Angulus enim OBN biſectus eſt ex conſtructione, per rectam BF; igitur cum æquales

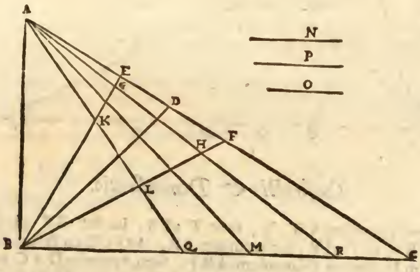


fint

fint anguli O B P, P B N, [a] erit ut O B ad B N, hoc est Q ad R, ita O P ad P N, cui cum æquidistet M K, erit quoque ratio K L ad L M æqualis rationi O P ad P N, adeoque rationi Q ad R. a 3. sexti.

PROPOSITIO CXX.

IN triangulo A B C rectangulo, positæ sint duæ rectæ B E, B F, quarum angulum bisecet B D, quæ etiam rectum angulum bifariam dividat. Oportet ex A puncto ponere duas A H, A L, quarum angulus H A L bisectus sit per rectam A M (quæ A B, B M æquales exhibet lineas) ita tamen ut ratio H G ad K L sit datæ rationi N ad P æqualis.



Constructio & Demonstratio.

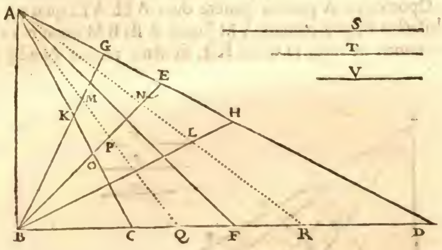
POnatur O tertia proportionalis rectis N, P, deinde fiat ut P ad O, ita B M ad B Q, utque P ad N ita B M ad B R, & jungantur A R, A Q, erunt lineæ H G, K L quæ postulantur. Quoniam enim proportionales sunt B R, B M, B Q, sitque B M æqualis B A, [a] similia sunt triangula A B R, A B Q, & anguli A B E, F B C ex constructione æquales; igitur [b] similia etiam sunt triangula A B K, H B R, unde ut est R B ad B A, ita H B ad B K. Sed etiam [c] similia sunt triangula A B G, L B Q, igitur ut A B ad B Q, hoc est R B ad B A, hoc est [d] H B ad B K; ita G B ad B L; igitur etiam similia sunt triangula H B G, K B L, quare ut H B ad K B, ita est H G ad K L, sed ut [e] H B ad B K, ita quoque est B R ad B A, hoc est B M, igitur H G est ad K L ut B R ad R M, hoc est N ad P. Sunt autem [f] anguli R A M, M A Q æquales, eo quod sint proportionales lineæ B R, B M, B Q.

a 60 hujus
b 73. hujus
c per eandē
d 77. hujus
e per eandē
f 58. hujus

PROPOSITIO CXXI.

Sint A B C, A B D, similia triangula, & recta B E bipartiatur angulos A B D, & G B H, insuper ponatur A F, quæ bisecet angulum D A C.

Oportet ex A ponere rectas A R, A Q secantes lineas H B, G B in L. & M, ut anguli R A F, F A Q æquales sint, & ratio L B ad B M sit eadem cum ratione data S ad T, quæ minor sit eâ, quam habet H B ad B K.



Constructio & Demonstratio.

Fiant proportionales S, T, V, & ut T ad S, ita fiat B F ad B R, & B F ad B Q ut T ad V, ponanturque A R, A Q: Dico factum quod petitur. Est enim Isoscelium triangulum A B F, nam [a] angulus D A C ex constructione bisectus est per A F, unde ratio D B F æqualis est rationi D B A, hoc est [b] H B K, suntque [c] proportionales B D, B F, B C. Est autem ratio H B K, hoc est D B F major ratione S T, & rationi S T æqualis ratio R B F; igitur ratio D B F major est R B F ratione, & similiter ratio F B C major ratione F B Q: Quia vero ex constructione proportionales sunt rectæ R B, F B, Q B, & F B æqualis A B, [d] similia etiam sunt triangula A B R, A B Q; & [e] angulus R A Q bisectus per rectam A F, & [f] ratio L B M eadem cum ratione R B A, hoc est R B F, hoc est S ad T.

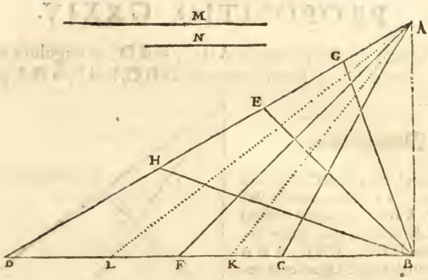
a 61. *hujus*
b 77. *hujus*
c 57. *hujus*
d 60. *hujus*
e 58. *hujus*
f 77. *hujus*

PROPOSITIO CXXII.

Datis duobus triangulis similibus A B C, A B D, & B E bisecante angulum rectum,

Oportet ponere rectas B G, B H, quæ datam M N obtineant rationem, minorem tamen ratione D B ad B A majorem vero ratione æqualitatis, ita ut angulum G B H recta B E bifariam dividat.

Con-



Conſtructio & Demonſtratio.

POnantur [a] lineæ A L, A K habentes rationem M ad N, ita ut angulus L A K bisectus ſit per rectam A F, & dividatur A D in G & H ſicut eſt diviſa C D in K & L, & jungantur B G, B H: Dico ſolutum eſſe problema. Cum enim ſimilia ſint tam triangula A B C, A B D quam [b] triangula A B L, A B K, & recta A F biſecet angulos D A C, L A K, recta autem A D diviſa ſit in G, E, H, ut C D in K, F, L, [c] erit angulus G B H biſectus, igitur B H eſt ad B G ut H E ad E G, hoc eſt L F ad F K, hoc eſt M ad N.

a 112.hujus
b 59.hujus
c 111.hujus

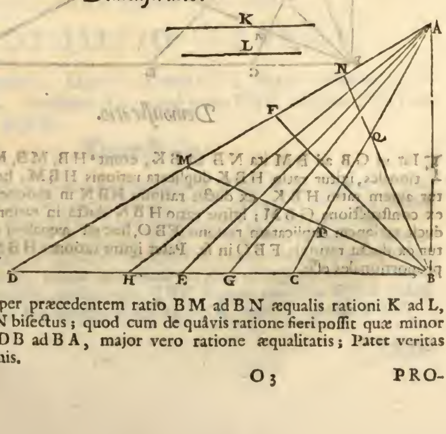
PROPOSITIO CXXIIJ.

SInt ſimilia triangula rectangula A B C, A B D, & rectæ A B, B E æquales:

Dico omnem rationem, minorem ratione D B ad B A & majorem ratione æqualitatis, exhiberi poſſe per duas lineas ex B ductas, quarum angulum biſecet recta B F.

Demonſtratio.

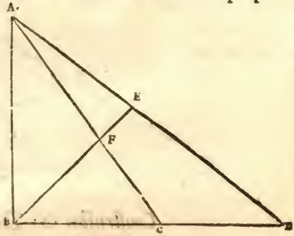
SIt enim quævis ratio K ad L, minor ratione D B ad B A & major æqualitatis, & fiat [a] rationi K ad L æqualis ratio H E G ut A E biſecet angulũ H A G; diviſâ autẽ rectâ A D in N, F, M, ut C D diviſa eſt in G, E, H, ducantur B M, B F, B N, erit per præcedentem ratio B M ad B N æqualis rationi K ad L, & angulus M B N biſectus; quod cum de quâvis ratione fieri poſſit quæ minor eſt, quam ratio D B ad B A, major vero ratione æqualitatis; Patet veritas hujus propoſitionis.



a 112.hujus

PROPOSITIO CXXIV.

SInt iterum similia triangula A B C, A B D, & angulum rectum bisecet recta B E: Dico rationes D B C, E B F, A B A proportionales esse.

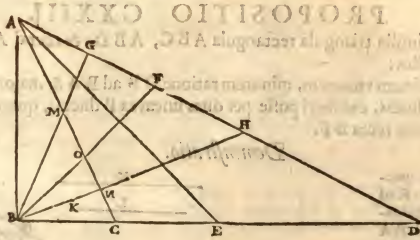


Demonstratio.

a 68. hujus. EST enim [a] ratio D B C duplicata rationis E B F; igitur ratio D B C ducta in A B A, æquatur rationi E B F in se ductæ; tres igitur rationes illæ D B C, E B F, A B A proportionales sunt: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXXV.

TRiangula A B C, A B D sint similia, ducantur ex B rectæ B G, B F, B H, ut recta B F bisecet angulos A B D, G B H: Dico rationes H B N, F B O, G B M proportionales esse.



Demonstratio.

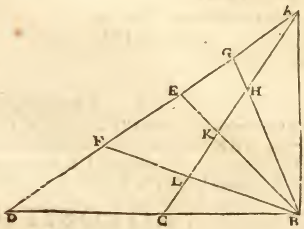
a 68. hujus. FIat ut G B ad B M ita N B ad B K, erunt [a] H B, M B, K B lineæ proportionales, igitur ratio H B K duplicata rationis H B M, hoc est F B O. Oritur autem ratio H B K, ex ductu rationis H B N in rationem N B K, hoc est ex constructione G B M; igitur ratio H B N ducta in rationem G B M producit rationem duplicatam rationis F B O, hoc est æqualem ei, quæ producitur ex ductu rationis F B O in se. Patet igitur rationes H B N, F B O, G B M proportionales esse.

PRO-

PROPOSITIO CXXVI.

POnantur in triangulis ſimilibus A B C, A B D, rectæ B F, B G, quarum angulum G B F biſecet recta B E, quæ pariter angulum A B C biſariam dividat: Dico rationem B D ad B C compoſitam eſſe ex duplicata ratione B D ad B F, & ex duplicata B F ad B G, denique ex duplicata ratione B G ad B A.

Demonſtratio.



RAtio B D ad B C componitur ex ratione B D ad B F, & B F ad B G, & B G ad B A, & B A ad B H, & ulterius B H ad B L, tandem ex ratione B L ad B C: ſunt autem [a] ſimilia triangula D B F, A B H & F B G, H B L denique G B A, L B C, igitur rationes B A ad B H, B H ad B L, B L ad B C æquales ſunt rationibus B D ad B F, B F ad B G, B G ad B A. Patet igitur veritas propoſitionis. a 73 *hujus.*

PROPOSITIO CXXVIJ.

IIſdem manentibus: Dico rationem F B L ſuperare rationem G B H duplicatâ ratione F B G.

Demonſtratio.

RAtio F B L eſt compoſita ex ratione F B ad B G, B G ad B H, B H ad B L, eſt autem ratio H B L [a] æqualis rationi F B G; igitur patet quod ratio F B L ſuperet rationem G B H duplicatâ ratione F B G. a 77 *hujus*

PROPOSITIO CXXVIIJ.

IIſdem manentibus: Dico quod ratio F B L ſuperet rationem E B K ratione F B G. Similiter dico quod ratio E B K ſuperet G B H rationem, ratione F B G.

Demonſtratio.

RAtio F B L etiam componitur ex ratione F B G & ex ratione G B L; igitur ratio F B L ſuperat rationem G B L ratione F B G. Sed rationi G B L æqualis eſt ratio E B K: Patet igitur prima pars propoſitionis.

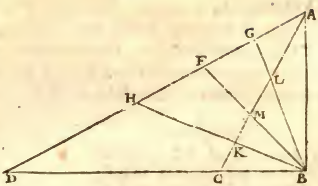
Secunda vero conſtabit, ſi rationes F B L, E B K, G B H, quæ proportionales ſunt, ponantur in ſegmento Hyperbolico, continebunt ſegmenta Arithmeticè proportionalia, itaque ſuperabunt invicem eodem ſegmento, & conſequenter eâdem ratione, igitur ratio E B K ſuperat rationem G B H eâdem ratione, quâ ratio F B L ſuperat rationem E B K, hoc eſt ratione F B G.

PRO-

PROPOSITIO CXXIX.

IN triangulo rectangulo A B D ponatur A C, quæ cum A B æqualem angulum constituat angulo A D B, & bisecet recta B F angulos A B D, G B H:

Dico rationem B D ad B C superare rationem H B K ratione G B L.



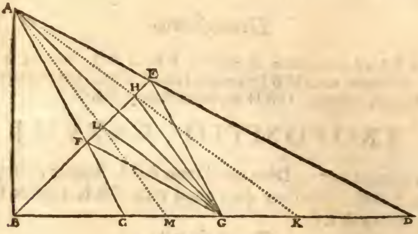
Demonstratio.

a 126. hujus — OStensum est [a] rationes H B K, F B M, G B L proportionales esse; igitur ratio H B K ducta in G B L æqualis est duplicatæ rationi F B M. Sed ratio
b 68. hujus — D B C [b] duplicata est rationis F B M, igitur ratio D B C superat rationem H B K ratione G B L.

PROPOSITIO CXXX.

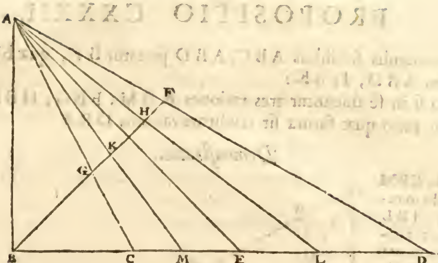
SInt iterum similia triangula A B C, A B D, & B E bisecans rectum angulum A B D, & sit A B æqualis B G, & ponatur ratio D G ad G C duplicata rationis K G ad G M & A G bisecet angulum K A M:

Dico etiam rationem D E ad F C duplicatam esse rationis H K ad L M.



Demonstratio.

a 67. hujus — POnantur G E, G H, G L, G F, quia [a] ratio E B F æqualis est rationi D B A,
b 2. sexti. — hoc est D B G [b] erit F G parallela E D. Sed etiam ratio E B F æqualis est rationi G B C, igitur & recta F C parallela est rectæ E G. Similiter ostenditur rectas L G, H K, & L M, H G parallelas esse. Cum itaque ratio K H ad
c 69. hujus — L M [c] sit duplicata rationis K H A, hoc est K B A, hoc est K B G, hoc est K G M, cujus quoque duplicata est ratio D G C, ratio D G C æqualis
d per eandē — est rationi K H ad L M: [d] Rationis autem D G C, hoc est D E A, duplicata est ratio D E ad C F; igitur ratio D E ad C F duplicata est rationis K H ad L M.



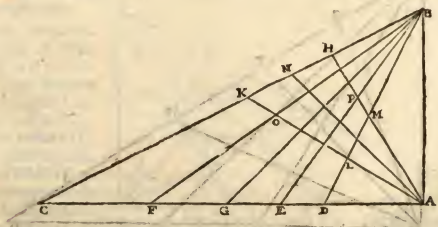
Corollarium.

Colliges ex dictis hîc & superius; si sint similia triangula A B C, A B D, & A B E Isosceles & B F bisecans angulum rectum, sitque ratio F B G duplicata rationis H B K, & A E bisecans angulum K A H, rationem D B C rationis L B M duplicatam esse, Ratio enim D B C duplicata est rationis F B G, & ratio L B M duplicata rationis H B K, cujus quoque duplicata ponitur ratio F B G, adeoque ratio L B M æqualis est rationi F B G, cujus duplicata est ratio D B C.

Colliges ulterius hinc rationem D A C duplicatam esse rationis L A M, cum ratio D A C æqualis sit rationi F B G, & ratio L A M æqualis rationi H B K.

PROPOSITIO CXXXI.

Sint similia triangula A B C, A B D, & A B E, A B F, sitque recta A N bisecans angulos B A C, H A K, & ratio C B ad B D, duplicata rationis F B ad B E: Dico etiam rationem K A M duplicatam esse rationis O A P.



Demonstratio.

Ratio C B ad B D [a] eadem est cum ratione C A ad A B, hoc est K A ad A M, & similiter ratio F B ad B E [b] eadem est cum ratione F A ad A B, hoc est O A ad A P. Sed ex suppositione ratio C B ad B D duplicata est rationis F B ad B E, igitur ratio K A ad A M duplicata est rationis O A ad A P.

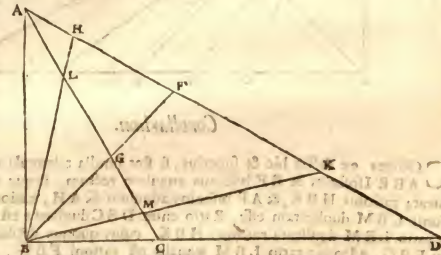
a 67 hujus
b per eandem.

PROPOSITIO CXXXII.

IN triangulis similibus A B C, A B D ponatur B F, quæ bisecet angulos A B D, H B K:

Dico si in se ducantur tres rationes K B M, F B G, H B L, quod prodibit ratio quæ futura sit triplicata rationis D B A.

Demonstratio.



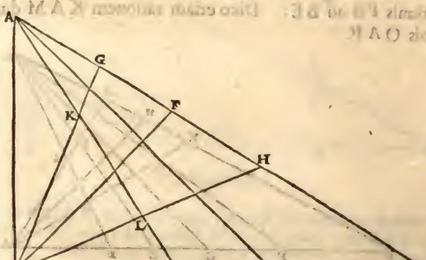
Ratio KBM ducta in rationem H B L [a] producit rationem duplicatā rationis F B G, igitur ratio K B M in H B L ducta in rationem F B G, hoc est rationes K B M, F B G, H B L in invicē ductæ, exhibent rationem, quæ triplicata est rationis F B G, hoc est D B A.

a ex 126. hujus.

PROPOSITIO CXXXIII.

SImilia sint triangula A B C, A B D, & Isoscelium A B E bisectum per B F, & ratio D F A duplicata rationis H F G, ut sint anguli H B F, F B G æquales ductis B H, B G:

Dico rationem H B L triplicatam esse rationis G B K.



Demonstratio.

QUoniam ratio D F A duplicata est rationis H F G, ex suppositione uti & anguli H B F, F B G æquales, igitur etiam ratio D F A duplicata est rationis H B G, cum [a] ratio H B G æqualis sit rationi H F G, Est autem ratio

a 3. sexti

D F A,

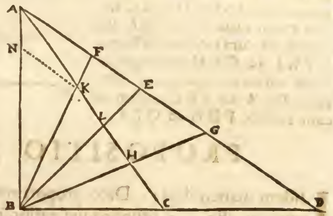
DFA, hoc est DBA, [b] æqualis rationi HBK: igitur ratio HBK duplicata est rationis HBG: Proportionales itaque sunt rectæ BH, BG, BK, & ratio GBK æqualis rationi HBG. Cum vero ratio GBL [c] æqualis sit rationi HBK, erit quoque ratio GBL duplicata rationis HBG, hoc est GBK, unde etiam proportionales sunt BG, BK, BL, & consequenter quatuor lineæ BH, BG, BK, BL in continua sunt analogia. Patet itaque rationem HBL triplicatam esse rationis HBG, hoc est GBK.

b 77. hujus
c per eandē

PROPOSITIO CXXXIV.

SEcent denuo rectæ BF, BG similia triangula ABC, ABD, & angulos ABD, FBG bisecet recta BE:

Dico rationem DBG ductam in rationem FBA æqualē esse rationi FBK



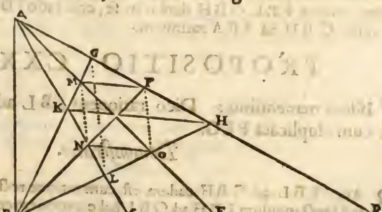
Demonstratio.

RAtioni DBG æqualis est ratio ABK, propter triangulorum [a] similitudinem; Ponatur autem KN parallela AF, erit KBN ratio [b] æqualis rationi FBA. Ratio autem ABK componitur ex ratione ABN, & ex ratione NBK; igitur ratio ABK hoc est DBG, ducta in rationem KBN exhibet rationem ABN (ratio enim NBK ducta in rationem KBN [c] producit rationem NB ad BN) igitur ratio DBG ducta in FBA rationem, producit rationem ABN, hoc est, rationem FBK.

a 73. hujus
b 2 sexti.
c tom 2. de proport. propſ: 76.

PROPOSITIO CXXXV.

SEcet recta BF angulos ABD, GBH bifariam in triangulis similibus, sitque BE æqualis AB, deinde ducantur rectæ AE, & FM, HK, NO, MN, GL, FO. Dico triangulum GKL esse ad triangulum MKN ut triangulum GHL, ad FHO triangulum.



Demonstratio.

OStensum est [a] rationem KN ad NL, hoc est HF ad FG, eandem esse cum ratione HO ad OL, igitur [b] parallelæ sunt rectæ GL, FO, uti & rectæ GL, MN. Et ulterius cum sit LN ad NK ut GF ad FH, erit componendo ut LK ad NK, ita GH ad FH: Sed ut GH ad FH ita est GL ad FO, utque LK ad NK, hoc est GH ad FH, ita GL ad MN, igitur GL est ad MN ut GL ad FO. Patet itaque per 22. sexti triangulum GKL esse ad triangulum MKN ut triangulum GHL ad FHO triangulum.

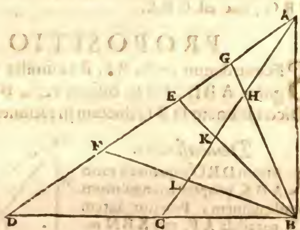
a 80 hujus
b 2. sexti.

Eodem discursu ostenditur triangula KGH, MGF & KLH, NLO proportionalia esse.

PROPOSITIO CXXXVI.

IN similibus triangulis A B C, A B D ponatur recta B E, quæ angulos A B D, G B F bifariam dividat: Dico quod ratio D B A ad A B C eadem sit cum ratione F B H ad G B L.

Demonstratio.



a 99. *de proport: operis Geometr.* RAtio D B A ad A B C, [a] eadem est cum ratione rectanguli D B C ad A B A rectangulum, quæ est æqualitatis; cum proportionales sint D B, A B, B C. Sed etiam ratio F B H ad G B L eadem est cum ratione rectanguli F B L ad G B H rectangulum,

b 87 *hujus* [b] quæ etiam est æqualitatis: igitur ratio D B A ad A B C eadem est cum ratione F B H ad G B L.

PROPOSITIO CXXXVIJ.

IIsdem manentibus: Dico proportionem rationis D B C ad F B L eandem esse cum proportione rationis G B H ad A B A rationem.

Demonstratio.

PEr propositionem 125. hujus rationes F B L, E B K, G B H sunt proportionales; igitur ratio F B L ducta in rationem G B H, æqualis est rationi E B K

a 93. *proport. oper: Geom.* in se ductæ, sive duplicata est rationis E B K. Sed etiam ratio D B C ducta in rationem A B A duplicata est rationis E B K; ratio [a] enim D B C, ducta in rationem æqualitatis, producit rationem D B C, quæ est duplicata E B K; igitur cum ratio prima D B C ducta in ultimam A B A producat idem quod rationes mediæ F B L, G B H ductæ in se, erit ratio [b] D B C ad rationem F B L,

b ex 16. *sex.* ut ratio G B H ad A B A rationem.

PROPOSITIO CXXXVIIJ.

IIsdem manentibus: Dico rationem F B L ad G B H eandem esse cum duplicata F E G.

Demonstratio.

a 99. *operis Geom: de prop:* RAtio [a] F B L ad G B H eadem est cum ratione rectanguli F B H ad G B L: sed [b] rectangulum F B H ad G B L habet rationem compositam ex ratione F B ad B G, & ex ratione H B ad B L, sed [c] ratio H B L æqualis est rationi F B G,

b 23. *sexti.* igitur rectangula F B H, G B L sunt in duplicata ratione F B G, hoc est [d] F E G,

c ex 87. *hujus.* cum angulus F B G sit divisus bifariam per rectam B E. Manifestum igitur est

d 3. *sexti.* rationem F B L ad G B H eandem esse cum duplicata ratione F E G.

PROPOSITIO CXXXIX.

Iisdem positis: Dico rationem F B L ad G B H eandem esse cum ratione E F ad K L ad rationem G E ad H K.

Demonstratio.

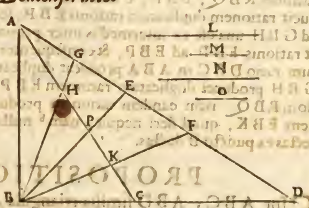
Ratio E F ad K L ad rationem G E ad H K, [a] eadem est cum ratione rectanguli E F H K ad rectangulum G E K L. Sed ratio [b] rectanguli E F H K ad rectangulum G E K L composita est ex ratione F E G, & ex ratione H K L; est [c] autem ratio H K L æqualis rationi F E G; igitur ratio rectanguli E F H K ad rectangulum G E K L est duplicata rationis F E ad E G, hoc est F B ad B G. Igitur cum etiam ratio F B L ad G B H sit [d] duplicata rationis F B ad B G, ut ostensum est, patet quod eadem sit ratio F B L ad G B H cum ratione E F ad K L ad rationem G E ad H K.

a 20. pro- po[illegible] Geom. b 23. [illegible] c [illegible] tendo [illegible] lum. d per præced:

PROPOSITIO CXL.

Sint similia triangula rectangula A B C, A B D, & B E bisecans rectum angulum A B C: Dico omnem proportionem duarum rationum maioris inæqualitatis, quarum singulæ rationes æquales sint rationi D B A, assignari posse in triangulo A B C, per duas lineas ex puncto B eductas, quarum angulum bipartiatur recta B E, ita ut F B H, G B K rationes exhibeant æquales rationi D B A.

Demonstratio.



Sint rationes L M, & N O singulæ æquales rationi D B A: igitur [a] ratio L M ad N O æqualis est rationi quam habet rectangulum L O ad M N rectangulum. [b] fiat igitur ut L ad O ita F B ad B K, utque N ad M, ita G B ad B H; erit ratio rectanguli L O ad M N eadem cum ratione rectanguli F B K ad G B H rectangulum. Sed [c] ratio rectanguli L O ad M N rectangulum, componitur ex ratione L ad M & N ad O ratione; igitur ratio rectanguli F B K ad G B H componitur ex ratione L ad M & ex ratione N ad O, hoc est ex constructione D B ad B A, hoc est A B ad B C; est autem angulus B C K æqualis angulo B A G ex constructione, similia igitur sunt [d] triangula A B G, K B C & consequenter angulus K B C æqualis angulo A B G, cum vero anguli A B P, P B C æquales sint ex constructione, si auferantur æquales manent H B P, P B K æquales. Duximus itaque lineas ex puncto B, quarum angulum bipartiatur recta B E, & rectæ F B H, G B K rationes habeant æquales rationi D B A.

a 99. [illegible] Geom: b 17. [illegible] c 23. [illegible] d 7. [illegible]

d 7. [illegible]

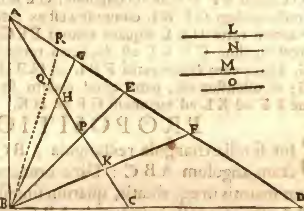
Scholion.

Videtur vi demonstrationis ab hac propositione excludi casus ille, in quo L *esset æqualis* N *& recta* M *æqualis* O, *tunc enim ratio* L O *esset æqualis* N M, *& per Coroll.* 85. *hujus ratio* LO *non nisi semel per unam lineam ductam ex* B *ad* A D *exhiberi potest, eritque hæc recta* E B *cujus ratio* E B P *æqualis est rationi* LO. *Verum hanc propositionē consideranti apparet non peti hic rationes* F B K, G B H *æquales rationibus* L *ad* O *&* N *ad* M *nisi in quantum inserviant ad inveniendas rationes* F B H, G B K *æquales rationibus* L *ad* M *&* N *ad* O. *Si vero lineæ* L, N, *&* M, O *æquales sint, ipsa similium triangulorum latera exhibent rationes æquales rationibus* L *ad* M *&* N *ad* O, *nempe* D B *ad* B A *æqualis* L *ad* M, *&* A B C *æqualis* N *ad* O. *Patet igitur universalem esse hanc propositionem.*

PROPOSITIO CXLI.

Iisdem manentibus : Dico omnem proportionem mediam inter rationes D B C ad A B A & E B P ad E B P assignari posse per duas lineas ex puncto B eductas constituentes æquales angulos cum recta B E.

Demonstratio.



Sit igitur quævis proportio L N ad M O, quæ minor sit proportione rationis D B C ad A B A, major autem proportione rationis E B P ad E B P, ita ut ratio L N distet a ratione D B C æquali ratione, quâ ratio M O distat a ratione A B A (hoc enim ad proportionem mediam requirimus ut ejus rationes distent æquali intervallo rationis ab ipsis extremis aut media) & per Coroll. 117. hujus fiat rationi L ad N æqualis ratio F B K; & rationi M ad O ratio G B H æqualis: Dico angulos D B F, A B G æquales esse, uti & angulos E B F, E B G. Si enim anguli E B F, E B G æquales non sunt; fiant æquales E B F, E B R, igitur [a] proportionales sunt rationes R B Q, E B P, F B K, & ratio F B K ducta in R B Q rationem producit rationem duplicatam rationis E B P : sed ex constructione proportio F B K ad G B H una est ex intermediis inter proportiones rationis D B C ad A B A, & rationis E B P ad E B P, & consequenter æqualiter distat ab extremis, unde cum ratio D B C in A B A producat duplicatam E B P, etiam ratio F B K in G B H producet duplicatam rationem E B P : quare ratio G B H æqualis est rationi R B Q. nam eandem rationem producunt, si multiplicentur per rationem E B K, quod fieri nequit, nam [b] nulla ratio secundo exhiberi potest per rectas ex puncto B ductas.

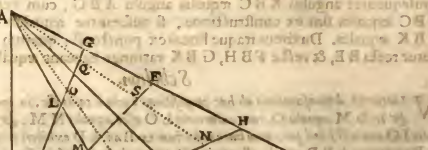
a 125. hujus

b Coroll. 85. hujus

PROPOSITIO CXLII.

Sint A B C, A B D similia triangula, & angulos A B C, G B H bisecet recta B F, angulos autem H A K, N A R bifariam dividat recta A E: Dico rationem H B L ad N B O eandem esse cum ratione D B ad P B.

Demonstratio.



Ratio H B L [a] eadem est cum ratione D B A, & ratio N B O eadem cum ratione P B A; igitur ut ratio D B A ad P B A, ita est ratio H B L ad N B O: sed [b] ratio D B A ad P B A est ut D B ad P B; igitur ratio H B L ad N B O est eadem cum ratione D B P.

a 77. hujus

b 2. lib. 8. tom. 2.

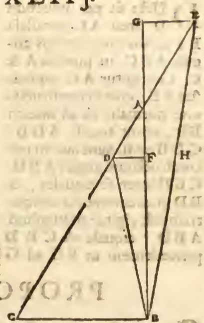
DE FIGURIS TRIANGULARIBUS PARS QUARTA

De Triangulis Isosceliis bisectis, ac linearum in iis ex uno angulo æqualium ductarum proprietatibus.

PROPOSITIO CXLIIJ.

SInt trianguli A B C producta latera, B A in G, & C A in E, & sint anguli æquales A B D, A B E, & ponantur E G, D F basi B C parallelæ:

Dico rectam G B sectam in A & F media & extrema ratione proportionali.



Demonstratio.

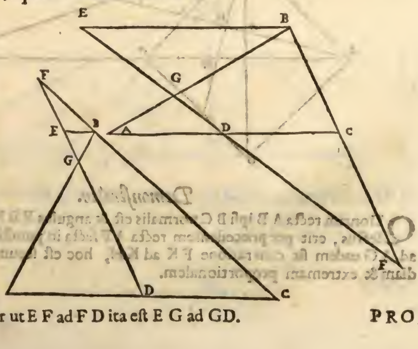
[a]UT E A ad A C ita G A ad A B; [b] igitur ut B G ad G A ita est C E ad E A. Quia vero angulus D B E bisectus est, [c] erit E A ad A D ut E B ad B D, hoc est B H, & consequenter quia est [d] E B ad B H ut E C ad C D, erit quoque ut E A ad A D, ita E C ad C D: unde quia G B secta [e] est in A & F, ut E C in A & D, erit quoque G B secta secundum extremam & mediam rationem proportionalem.

a 4. sexti.
b 18. sexti.
c 3. sexti.
d 2. sexti.
e ex Elem.

PROPOSITIO CXLIV.

TRianguli cujusvis A B C basis A C bisecta sit in D, acta deinde recta E B, quæ æquidistet A C, ducatur per D recta quædam E D occurrens B C in F & A B in G:

Dico rectam F E D in punctis D & G sectam esse, ut E F ad F D eandem obtineat rationem, quam habet E G ad G D.



Demonstratio.

EX constructione parallelæ sunt rectæ A C & E B, unde E B ad D C [a] eandem habet rationē quam habet E F ad F D; Quare cum æqualis sit ex constructione recta D C rectæ D A, quam habet rationem E F ad F D eandem obtinet E B ad A D. Est autem E B ad A D ut E G ad G D, igitur ut E F ad F D ita est E G ad GD.

a 4. sexti.

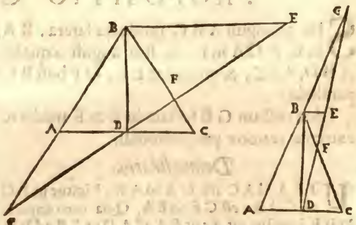
PRO.

PROPOSITIO CXLV.

Ponatur angulus A B C bifariam divisus per rectam B D ad quam erigatur perpendicularis B E, & quævis per punctum D ponatur E G occurrens productis lateribus in F & G:

Dico E G rectam in punctis F & D sectam esse, ut sit G E ad E F ratio æqualis rationi G D ad D F.

Demonstratio.



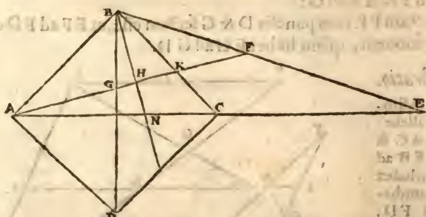
Ducta sit per punctum D linea A C parallela B E occurrens lateribus anguli A B C, in punctis A & C. Cum igitur A C æquidistet E B, quæ ex constructione normalis est ad lineam B D, erunt anguli A D B, C D B recti. Sunt autem per constructioné anguli A B D, C B D inter se æquales, & B D linea communis utrique triangulo; igitur triangulum A B D [a] æquale est C B D triangulo, & basis A D basi D C æqualis, unde per præcedentem ut E G ad G D ita est E F ad F D.

a 26. primi.

PROPOSITIO CXLVJ.

Sit quadratum A B C D cujus diametri A C, B D, sitque angulus E B N, bisectus lineâ B C:

Dico rectam A F sectam esse secundum mediam & extremam rationem proportionalem in punctis H & K.



Demonstratio.

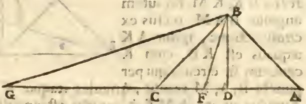
Quoniam recta A B ipsi B C normalis est, & angulus E B N per rectam B C bisectus, erit per præcedentem recta A F secta in punctis K & H ut ratio F A ad A G eadem sit cum ratione F K ad K H, hoc est secundum rationem mediam & extremam proportionalem.

Corollarium.

QUoties igitur triangulum rectangulum Isosceles bisectum per rectam B D, (cujus latus B C bisecat angulum aliquem N B E) intersecabitur per rectam aliquam e puncto A eductam, ut videre est in recta A F, semper linea A F extrema & media ratione proportionali secta erit; Prosequamur itaque sequentibus propositionibus quasdam proprietates hujus propositionis, quas intentioni nostræ convenientes censebimus.

PROPOSITIO CXLVIJ.

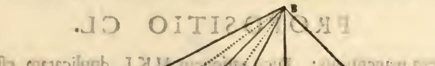
TRiangulo Isosceli rectangulo bisecto per rectam B D adveniant binæ rectæ B F, B G quarum angulum F B G bifariam dividat recta B C: Dico D F, D C, D G lineas proportionales esse.



Demonstratio.

EX constructione A B C angulus rectus est, & per B D bisectus; igitur a A D B, B D C anguli recti sunt; Cum A B C triangulum Isoscelium ponatur; est autem tam angulus D C B, quam angulus D B C semirectus. Angulus vero D C B æqualis est angulis C B G, B G C, igitur etiam angulus C B D eisdem est æqualis. Sed angulus C B D æqualis est angulis C B F, & F B D, igitur cum æquales sint ex constructione C B F, G B C, etiam æquales erunt F B D, B G D. Similia itaque sunt triangula D B F, D B G, quare D F est ad D B hoc est D C, sicut D C ad D G. Proportionales itaque sunt D F, D C, D G.

a *Clavius in Scholio prop: 26. primi,*



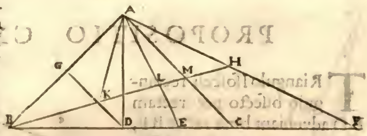
Idem dicendum est de rectis D H, D C, D K si recta B C bisecet angulum H B K.

PROPOSITIO CXLVIIJ.

SIt Isoscelium rectangulum A B C bisectum per A D, & D G parallela A C, & proportionales sint D E, D C, D F; positâ quâvis B H, quæ occurrat D G in K, ducatur K A.

Dico triangula K A L, K A H esse similia.

Demonstratio.



CUm parallelæ sint rectæ A C, D G, & recta B C divisa sit bifariam in D, [a] æquales quoque sunt rectæ B K, K M. Est autem angulus B A M rectus ex constructione, igitur A K æqualis est K B, cum K centrum sit circuli, qui per puncta B, A, M transit; Angulus itaque K A M angulo A M K æqualis est; Angulus autem A M K [b] æqualis est angulis M A H & A H M; igitur etiam angulus M A K illis æqualis est: Est autem angulus M A L æqualis angulo M A H ex constructione, igitur etiam angulus A H M angulo L A K est æqualis. Cum igitur utrique triangulo A K L & A K H communis sit angulus A K L, patet similia esse triangula A K L & A K H.

a ax 2. sexti.
b 32. primi

PROPOSITIO CXLIX.

IIsdem positis: Dico lineas K L, K M, K H proportionales esse.

Demonstratio.

QUoniam constat per propositionem præcedentem similia esse triangula A K L, A K H; igitur [a] latera illorum proportionalia sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur: Igitur K L est ad K A, sicut A K, hoc est [b] K M ad K H.

a 4. sexti.
b 41. hujus

PROPOSITIO CL.

IIsdem manentibus: Dico rationem H K L duplicatam esse rationis H A L.

Demonstratio.

PRoportionales esse lineas K L, K M, K H docet præcedens propositio; igitur ut est K H ad K M ita est H M ad M L. Sed ratio H K ad K L duplicata est rationis H K ad K M, hoc est H M ad M L, igitur cum [a] eadem sit ratio H M ad M L cum ratione H A ad A L (ex eo quod recta A M angulum H A L bifariam dividat) manifestum est rationem H K ad K L duplicatam esse rationis H A ad A L.

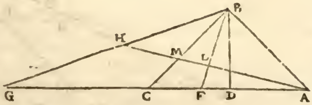
a 3. sexti.

PROPOSITIO CLI.

SIt iterum Isoscelion triangulum rectangulum A B C, & similia sint triangula D B F, D B G, & ducta quævis A H:

Dico A H ad A L eandem habere rationem, quam habet B H ad B L.

Demonstratio.



QUoniam angulus F B G bisectus est per rectam B C ex constructione, igitur ut L M ad M A [a] ita L B est ad B H, & quia angulus A B C rectus est, ostensum est [b] rectam A H divisam esse in L & M secundum mediam & extremam rationem proportionalem, igitur ut H M ad M L ita est H A ad A L, & consequenter ut H B ad B L ita est H A ad A L.

a 3. sexti.

b 146 hujus

PROPOSITIO CLIJ.

IIsdem manentibus: Dico A H esse ad H B ut A L ad B L.

Demonstratio.

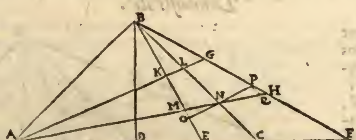
OStensum est [a] quod sit A H ad A L ut H B ad B L, igitur permutando ut A H ad H B ita est A L ad B L.

a 151. hujus.

PROPOSITIO CLIII.

IN Isosceles rectangulo A B C bisecto per B D, sint proportionales D E, D C, D F & ductæ A G, A H:

Dico rationem H N ad N M esse majorem quam sit ratio G L ad L K.

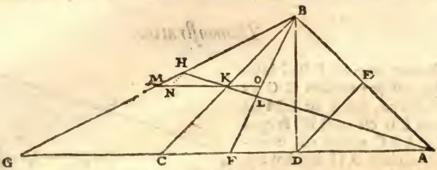


Demonstratio.

POnatur per N recta O N P, quæ sit æquidistans A G. Deinde sit P Q parallela B E, erit ratio G L ad L K æqualis rationi P N ad N O, hoc est Q N ad N M (propter triangulorum H N P, M N O similitudinem) sed ratio H N ad N M major est quam ratio Q N ad N M, ergo ratio H N ad N M major, est quam ratio P N ad N O, hoc est major est quam sit ratio G L ad L K.

PROPOSITIO CLIV.

SIt Isoscelium A B C rectangulum, & sint proportionales D F, D C, D G, & ductâ quâvis A H, ducatur B G, quæ secet A H in H: Dico rationem H K ad K L minorem esse quam sit ratio G C ad C F.



Demonstratio.

POnatur per punctum K, ubi A H intersecat B C, recta M K O parallela A G, & H N parallela B F; erit ratio M K O, hoc est G C F, major ratione N K ad K O, hoc est H K L ut patet in propositione præcedenti,

PROPOSITIO CLV.

ISdem manentibus: Dico nullam aliam lineam duci posse ex puncto A, quæ exhibeat rationem æqualem rationi H K, ad K L.

Demonstratio.

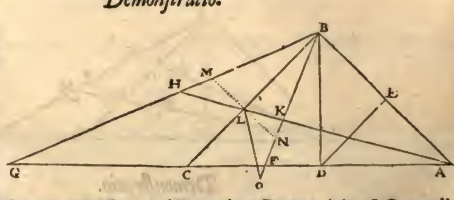
PEr præcedentes propositiones si ponatur recta infra A H, inter A H & A G, exhibebitur ratio major quam sit ratio H K ad K L: si vero ponatur recta supra A H, inter A H & A B, exhibebitur ratio minor ratione H K ad K L. Igitur ratio semel exhibita secundò non exhibebitur.

PROPOSITIO CLVI.

SIt Isoscelium A B C rectangulum bisectum per B D, & D E parallela B C, & proportionales D F, D C, D G & quævis ducta A H, quam secet M N orthogonalis B C in L:

Dico B H ad H M eam retinere rationem quam habet B K ad K N.

Demonstratio.

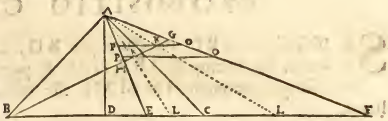


QUoniam M N secat B C ad angulos rectos & sint æquales anguli M B L, L B N, & B L communis utrique triangulo, erunt [a] triangula similia & æqualia M B L, L B N: & [b] anguli H M L, L N F æquales. Ponatur igitur L O æqualis L H, [c] erit angulus N L O æqualis M L H ob æquales lineas M L, L N & H L, L O, & angulos L M H, L N O æquales. Sed angulo M L H æqualis est angulus K L N, igitur B L N, N L O ęquales sunt anguli, & angulus K L N rectus est [d] igitur linea B O secta est secundum mediam & extremam rationem proportionalem; unde est B O ad O N (hoc est B H ad H M) ut B K ad B N.

a 26. primi
b 5. primi.
c 7. sexti.
d 146. huius.

PRO-

PROPOSITIO CLVIJ.



SImiliter sit triangulum rectangulum Isoscelium ABC, & similia sint triangula ADE, ADF & ducta quævis BG, deinde inter AC & AF vel AC & AE ponatur recta AL

Dico rationem LAK minorem esse ratione FAG.

Demonstratio.

DUcatur per punctum K recta KO parallela DF rectæ, cadet O infra G, erit itaque ratio FAO æqualis rationi LAK. Sed ratio FAG major est quam sit ratio FAO, igitur etiam ratio FAG major est quam sit ratio LAK.

PROPOSITIO CLVIII.

IIsdem manentibus: Dico rationem LAK maiorem esse ratione EAH.

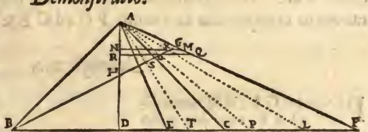
Demonstratio.

PRoducatur OK ut occurrat AE in P: Quoniam BG secat PO in K, igitur cum O sit infra G, per præcedentem, erit H infra P, igitur ratio EAH minor est quam EAP, ac proinde etiam ratio EAH minor quam sit ratio LAK.

PROPOSITIO CLIX.

IIsdem manentibus: Dico secundo exhiberi non posse lineam ex A eductam, occurrentem BG, BF lineis; ita ut secetur a recta BG, secundum rationem AKL.

Demonstratio.



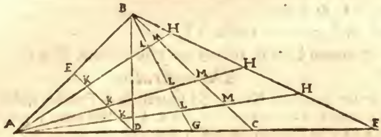
DUcatur ut prius per K recta MN parallela BF, erit ratio AKL æqualis rationi AND. Quod si vero altera linea, puta AP duci queat exhibens rationem AOP æqualem rationi AKL, erit punctum O diversum a puncto K: cum autem recta BG non sit parallela BE, sed quo magis producatur versus G eo magis recedat a recta BF, erit igitur punctum O in recta BG, vicinius rectæ BF quam K vel remotius. Ponatur itaque per O recta QR parallela BF erit quoque parallela MN; & quia ratio ARD æqualis est rationi AOP, & AOP æqualis AND, erit quoque ARD æqualis rationi AND, unde secta erit recta AD in diversis punctis secundum eandem rationem, sumendo antecedens ab eadem parte, quod fieri nequit.

Corollarium.

QUod dictum est in propositione de linea ex A puncto eductâ inter lineas AF, AC constitutâ, etiam intelligi debet de quâvis rectâ, quæ ex eodem puncto A demitti posset inter spatium lineis AC, AE interceptum; nam eadem demonstratio, quæ posita est, idem inferre valet: neque enim ratio AST sæpius exhiberi potest quam semel. Imo ratio AST lineis AC, AE intercepta etiam excluditur a spatio lineis AC, AF clauso, non minus atque ratio AKL excluditur angulo LAC.

PROPOSITIO CLX.

SIt Isoscelium ABC bisectum per BD, & recta AB per DE, & similia sint triangula DBF, DBG & ponantur quotlibet AH: Dico semper rationem HM ad ML esse rationem maioris inæqualitatis.



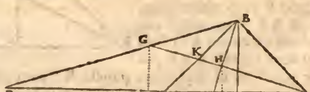
Demonstratio.

a 146. huius. Est enim recta AH[a] divisa secundum extremam & mediam rationem proportionalem in punctis M & L; ergo est AH ad AL ut HM ad ML. Sed semper ratio AH ad AL est ratio majoris inæqualitatis, igitur etiam ratio HM ad ML.

PROPOSITIO CLXI.

SIt triangulum Isoscelium rectangulum ABC, bifariam divisum per BD, & proportionales sint DE, DC, DF, junctisque BE, BF ducatur AG: Dico triangulum AGF ad triangulum AHE habere rationem compositam ex ratione FC ad CE & ex ratione GK ad KH.

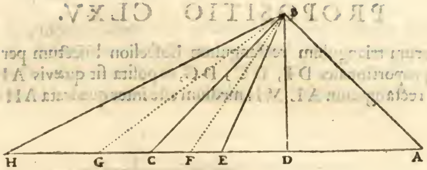
Demonstratio.



POnantur GL, HM normaliter ad AF, tunc erit ratio trianguli AGF ad AHE triangulum, composita ex ratione baseos AF ad AE, hoc
a 146. huius. est FC ad CE (cum sit[a] recta AF divisa in E & C secundum mediam & extremam rationem proportionalem) & ex ratione altitudinis GL ad HM altitudinem, hoc est GA ad AH, hoc est GK ad KH; igitur manifestum est, quod ratio trianguli AGF ad AHE triangulum sit composita ex ratione FC ad CE & GK ad KH.

PROPOSITIO CLXIJ.

SIt Isoscelium rectangulum ABC, & divisa sit linea DH, ut sint proportionales DE, DF, DC, DG. DH:
Dico rationem AH ad AE esse duplicatam rationis AG ad AF.



Demonstratio.

RAtio A H ad A E [a] eadem est cum ratione H C ad C E: similiter ratio A G ad A F, æqualis est rationi G C ad C F. Sed ratio D H ad D E duplicata est rationis D C ad D E, hoc est D G ad D F, cum igitur etiam ratio D H ad D E duplicata sit rationis B H ad B E, hoc est H C ad C E, erit ratio D G ad D F æqualis rationi H C ad C E. Sed etiam ratio D G ad G F duplicata est rationis G B ad B F, hoc est G C ad C F, igitur ratio H C ad C E, hoc est A H ad A E duplicata est rationis A G ad A F. a 146. hujus.

PROPOSITIO CLXIIJ.

IIsdem manentibus: Dico rationem trianguli G B H ad E B F esse triplicatam rationis G C ad C F.

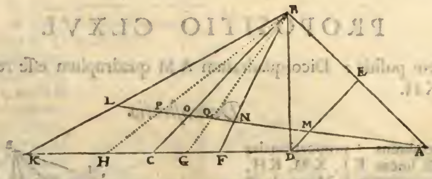
Demonstratio.

RAtio trianguli G B H ad E B F est [a] composita ex ratione H B ad B E (hoc est H C ad C E, hoc est duplicata G C ad C F) & ex ratione G B ad B F, hoc est G C ad C F, igitur ratio trianguli G B H ad E B F triplicata est rationis G C ad C H. a Command: apud Clav: l.6. Elem: in Schol: prop: 23.

PROPOSITIO CLXIV.

SIt triangulum Isoscelium rectangulum A B C bisectum rectâ B D, & factis proportionalibus D F, D C, D K, & D G, D C, D H, ponatur quævis A L, & B E parallela B C:

Dico rectangulum L M N rectangulo P M Q æquale esse.



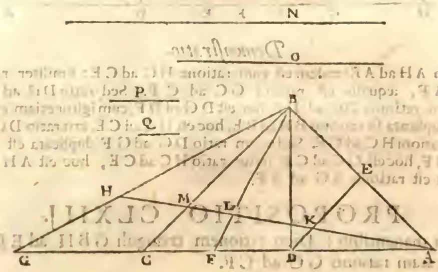
Demonstratio.

OStensum est [a] M N, M O, M L proportionales esse, sed per eundem discursum ostenditur quoque M Q, M O, M P esse proportionales: igitur cum rectangula L M N, P M Q quadrato M O æqualia sint, patet illa etiam inter se æqualia esse. a 149. hujus.

PRO-

PROPOSITIO CLXV.

SIt iterum triangulum rectangulum Isoscelion bisectum per B D & sint proportionales D F, D C, D G, & posita sit quævis A H: Dico rectangulum A L M H medium esse inter quadrata A H & L M.



Demonstratio.

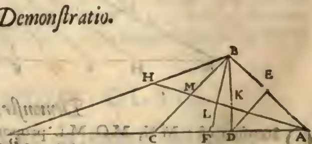
POnantur N, O, P, Q æquales lineis A H, A L, H M, L M. Quoniam igitur ostensum est [a] quod linea A H divisa sit in punctis L, M secundum mediam & extremam rationem proportionalem; igitur est A H ad A L ut H M ad L M, hoc est N ad O ut P ad Q. Ratio autem quadrati N ad rectangulum O P composita est ex ratione N ad O, & N ad P. Sed etiam ratio rectanguli O P ad quadratum Q ex iisdem composita est, scilicet ex ratione O ad Q, hoc est N ad P, & ex ratione P Q, hoc est N O: igitur quadratum N est ad rectangulum O P, ut O P rectangulum ad quadratum Q: igitur quadratum N rectangulum O P & quadratum Q proportionales sunt quantitates, hoc est quadratum A H rectangulum A L M H & L M quadratum.

a 146. *hujus*.

PROPOSITIO CLXVI.

IIsdem positis: Dico quadratum A M quadruplum esse rectanguli L K H.

Demonstratio.



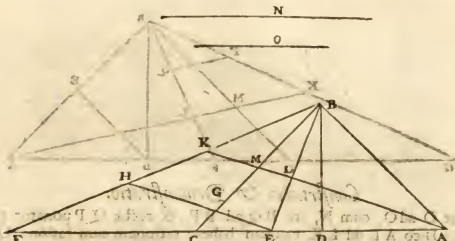
OStendimus [a] proportionales esse lineas K L, K M, K H, quadratum igitur K M æquale est rectangulo L K H: quia vero D E, C B parallelæ sunt, estque A B bifariam secta in E, hinc etiam A M bisecta est in K, unde quadruplum est quadratum A M quadrati K M, & consequenter quadruplum rectanguli L K H; quod fuit demonstrandum.

a 149. *hujus*.

PRO-

PROPOSITIO CLXVII.

DAta sit, iisdem manentibus (triangulo scilicet Isoscelio rectangulo ABC, bisecto per AD, & angulo FBE bisecto per BC) ratio quædam NO: Oporteat ex A ponere rectam AK, quæ exhibeat rationem KM ad ML æqualem rationi N ad O, quæ minor sit ratione FCE.



Constructio & Demonstratio.

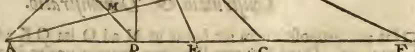
FIat ut O ad N ita BE ad BH, ducta deinde EH ponatur AK parallela EH; Dico factum quod petitur: Quod patet ex Elementis; nam rationi HG ad GE æqualis est ratio HB ad BE, hoc est KB ad BL, hoc est KM ad ML, cum angulus FBE ex constructione per rectam BC bifariam sit divisus.

PROPOSITIO CLXVIIJ.

SIt Isoscelium Rectangulum ABC bisectum per rectam BD, sintque proportionales DE, DC, DF, & ducantur BE, BF, denique DL sit parallela BC: Oporteat ex puncto A ponere rectam AG, quæ secta sit a lineis DL, BE, ut ratio MG ad MH sit eadem cum ratione data.

Constructio & Demonstratio.

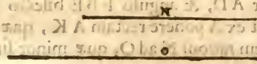
DAta sit ratio NP, & inter N & P media sit O linea; deinde per præcedentem fiat ut N ad O, ita GK ad KH, habebiturque intentũ. Ostensum est enim [a] quod sint proportionales MH, MK, MG, igitur MG est ad MK ut GK ad KH, sed GK ad KH est ex constructione ut N ad O, igitur ut N ad O ita MG ad MK, hoc est MK ad MH, igitur ut N ad P ita MG ad MH; quoniam sicut ratio NP est duplicata rationis N ad O, ita quoque ratio MG ad MH est duplicata rationis MG ad MK.

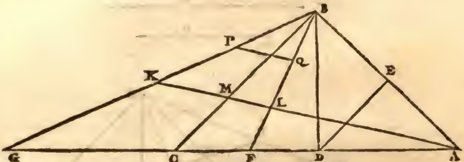


a 149. *hujus.*

PROPOSITIO CLXIX.

Iisdem manentibus: Oportet ponere rectam A K, ut ratio A L ad L K sit æqualis datæ O ad N.





Constructio & Demonstratio.

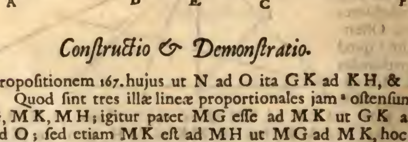
Fiat ut O ad O, cum N, ita B Q ad B P, & rectæ Q P ponatur parallela A K; Dico A L ad L K eandem habere rationem cum ratione O ad N. Quoniam est ut O, ad O cum N, ita B Q ad B P, erit etiam ut O, ad O cum N, ita B L ad B K, hoc est L M ad M K ob æquales angulos L B M, M B K: sed [a] ut L M ad M K ita est A L ad A K, igitur ut O, ad O cum N, ita A L ad A K, ergo ut O, ad N ita A L ad L K.

a 146. hujus.

PROPOSITIO CLXX.

Iisdem manentibus: Oportet ex A ponere lineam A G, quæ secta sit a lineis D L, E B, C B, F B ut sint proportionales M H, M K, M G secundum datam rationem N, O, P.





Constructio & Demonstratio.

Fiat per propositionem 167. hujus ut N ad O ita G K ad K H, & habebitur intentum. Quod sint tres illæ lineæ proportionales jam [a] ostensum est, nimirum M G, M K, M H; igitur patet M G esse ad M K ut G K ad K H, hoc est N ad O; sed etiam M K est ad M H ut M G ad M K, hoc est N ad O, hoc est O ad P, cum N, O, P sint in continua analogia. Patet igitur factum esse quod imperatum fuit.

a 149. hujus.

PRO-

PROPOSITIO CLXXJ.

IIsdem manentibus: Dico omnem rationem, intermediam inter rationem F D, DE & æqualitatis, posse assignari per rectam aliquam ex puncto A positam, quæ secet L D, E B, & F B; ita ut ratio M G ad M H sit una ex intermediis.

Demonstratio.

DEtur enim ratio N ad P, quæ sit æqualis uni earum, quæ exhiberi possunt inter rationes F D, D E, & æqualitatis, & sit O media inter N & P, & per propositionem 167. hujus ducatur A G, quæ exhibeat rationem G K H, hoc est M G ad M K, æqualem rationi N ad O: cum [a] igitur proportionales sint M G, M K, M H, erit ratio G M H duplicata rationis G M K, hoc est N ad O, est quoque ratio N ad P duplicata rationis N ad O; igitur rationes N ad P & G M H æquales sunt; & consequenter tam G M H, quam N ad P unà est ex intermediis rationibus, inter rationes F D E & æqualitatis. Cum autem hoc ipsum de quâvis aliâ verum sit, patet veritas propositionis.

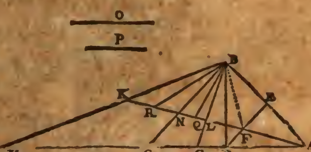
[a] 149. hujus.

PROPOSITIO CLXXIJ.

SIt triangulum rectangulum Isoscelion bisectum per B D, & sint proportionales D G, D C, D H & positâ quâvis A K, & D E parallelâ B C, data sit ratio O ad P.

Oporteat ponere inter puncta L & K lineas B R, B Q habentes rationem O ad P, ita ut angulus Q B R per B N bisectus sit.

Constructio & Demonstratio.

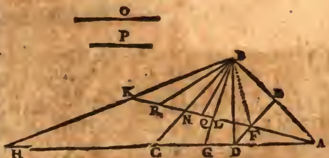


FIat quadrato sub linea F N, æquale rectangulum, sub ratione duplicata rationis O ad P nempe R F Q, & jungantur R B, Q B; Dico illas esse requisitas lineas. Quoniam ostensum est, dum sunt tres proportionales F Q, F N, F R & angulus A B N rectus est, quod similia sint triangula F B Q, F B R, & F N media sit inter R F, F Q; hinc æquales sunt anguli Q B N, N B R, & consequenter eandem habet rationem B R ad B Q quam R N, ad N Q hoc est R F ad F N, cujus duplicata est ratio R F Q, quæ cum etiam duplicata sit rationis O ad P, erit ratio R F N, hoc est R N Q, hoc est R B ad B Q, æqualis rationi O ad P. Fecimus itaque quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLXXIIJ.

Iisdem manentibus: Dico rationem R F Q duplicatam esse rationis R A Q.

Demonstratio.



a 15. *hujus.* Ratio R A Q eadem est [a] cum ratione R B ad B Q, hoc est RN ad N Q (cum angulus R B Q rectâ B N, ex constructione bifariam divisus sit) ratio [b] autem R N ad N Q eadem est cum ratione R F ad N F, cum [c] rectæ R F, N F, Q F proportionales sint. Sed rationis R F ad N F [d] duplicata est ratio R F ad QF; igitur ratio quoque R F ad Q F duplicata est rationis R N ad N Q, hoc est R B ad B Q, hoc est R A ad Q A. Quod erat demonstrandum.

b 1. *lib.* 2. *tom.* 1.
c 149. *hujus.*
d *ex elem.*

LIBER

LIBER TERTIUS DE CIRCULIS

ARGUMENTUM.

Liber hic in quatuor partes dividitur.

Prima in circulis ſimplicibus lineas proportionales, variaſque rationes deſignat.

Secunda vero circulos intra invicem poſitos complectitur :

Tertia autem linearum, in circulis ſeſe interſecantibus, rationes conſiderat :

Quarta denique in circulis tangentibus rationes examinat.

PARS PRIMA.

De Circulis ſimplicibus.

PROPOSITIO PRIMA.

IN quovis circulo cujus diameter AC, ex puncto quodam diametri D ductæ ſint rectæ D F, D B ad perimetrum, ut ſint proportionales D E D B, D C; productæ autem D E, D B ad alteram circuli peripheriam conſtituant rectas D G, D F.

Dico etiam rectas D A, D G, D F proportionales eſſe.



Demonſtratio.

QUoniam rectangula E D F, B D G, [a] æqualia ſunt, erit [b] ut E D ad D B ita D G ad D F, & ut D B ad D C ita D A ad D G. Sed eadem eſt ratio D B ad D C, & D E ad D B, cum ex hypoteſi ſint continuè proportionales : igitur ratio D A ad D G eadem eſt cum ratione D G ad D F Proportionales itaque ſunt D A, D G, D F.

a 35. tertii.
b 16. ſexti.

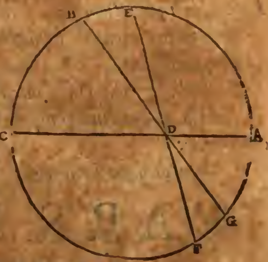
 Corol-

Corollarium.

HInc manifestè patet, si quovis numero continuè proportionales ex D puncto ad peripheriam positæ fuerint, quæ per D productæ iterum peripheriæ occurrant, productas quoque fore in continua analogia. Idque universaliter affirmandum, quocùmque loco punctum D in circulo assumatur, ut constat ex ipsa demonstratione.

PROPOSITIO IJ.

PEr datum in circulo punctum D, aliquot lineæ ductæ sese intersecent in D, ut tam DE, DB, DC quam DA, DG, DF sint proportionales: Dico rationes E D A, B D G, C D F similes esse.



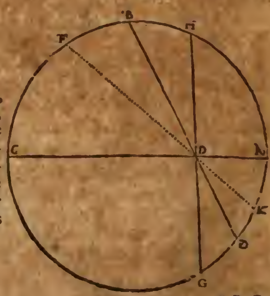
Demonstratio.

ITerum ut D G ad D F ita est D E ad D B; atqui ex hypothesi D A est ad DG ut DG ad D F, igitur ut D A ad D G ita est D E ad D B, & transponendo D E est ad D B ut D A ad D G, & permutando ut D E ad D A ita D B ad D G. Eodem discursu ostenditur D B esse ad D G ut D C ad D F; igitur rationes E D A, B D G, C D F similes sunt.

PROPOSITIO IIJ.

IN circulo A B C, cujus diameter A C, per punctum quodvis diametri posita sit recta B D E, utque B D ad D E, ita fiat F D ad D G producaturque F D in K, & G D in H:

Dico tum D F, D B, D H, tum D G, D E, D K lineas proportionales esse.



Demonstratio.

a 35. tertii. OB æqualitatem [a] rectangulorum FDK, B D E, H D G, erit ut F D ad B D, ita D E ad D K. Sed ex constructione F D est ad D G ut D B ad D E, & permutando F D est ad B D ut D G ad DE; igitur D G est ad D E ut D E ad D K, quare proportionales sunt D G, D E, D K; igitur etiam D F, D B D H [b] proportionales erunt.

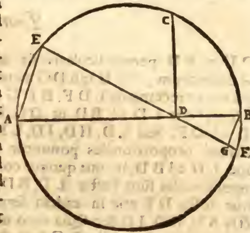
b prima hujus.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Sit A B diameter circuli A B F, & per punctum D posita sit quævis E D F: Dico rationem E D F minorem esse ratione A D B.

Demonstratio.



Quia rectangula A D B, E D F æqualia sunt, erit A D ad D E, [a] ut D F ad D B. Sed [b] A D major est quam E D, igitur D F major quoque est rectâ D B, junctâ autem A E fiat illi parallela B G, erit ut A D ad D E, hoc est D F ad D B, ita D B ad D G, quia vero D B minor est quam D F, erit D G multo minor quam D F, ac proinde E D ad D F [c] minorem habet rationem quam E D ad D G. Sed ratio A D ad D B eadem est cum E D ad D G, itaque ratio E D ad D F minor quoque est quam ratio A D ad D B. Quod fuit demonstrandum.

a 14. sexti.
b 7. tertii.
c 8. quinti.

PROPOSITIO V.

Iisdem manentibus: Dico rationem A D B superare rationem E D F duplicatâ ratione A D ad E D.

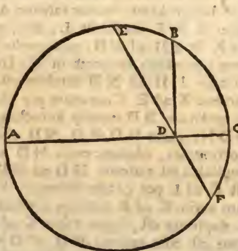
Demonstratio.

Quia [a] rectangula A D B, E D F æqualia sunt, erit [b] A D ad E D ut D F ad D B. Ratio autem A D ad D B componitur ex rationibus, A D ad E D, E D ad D F & D F ad D B, hoc est ex duplicata ratione A D ad E D, hoc est ex duplicatâ D F ad D B, & ex ratione E D ad D F. Patet itaque rationem A D ad D B superare rationem E D F duplicatâ ratione A D ad E D. Quod fuit demonstrandum.

a 35. tertii.
b 16. sexti.

PROPOSITIO VI.

In circulo A B C cujus diameter A C sint proportionales A D, E D, B D, sic tamen ut B D sit normalis rectæ A C; & E D producta in F: Dico rationem A D ad D C duplicatam esse rationis E D ad D F.



Demonstratio.

Cum D B ad Diametrum perpendicularis sit, lineæ A D, D B, D C [a] erunt continuè proportionales, atque adeo A D ad D C habebit duplicatam rationem ejus quam habet A D ad D B, hoc est D B ad D C. Sed etiam [b] ut D B ad D C sic E D ad D F, cum A D, E D, B D ponantur continuè proportionales: igitur A D erit ad D C in duplicata ratione E D ad D F.

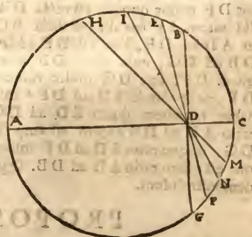
a ex Elem.
b 3. hujus.

PRO-

PROPOSITIO VII.

SI in circulo per aliquod diametri punctum D, quotlibet lineæ in continua ratione ducantur, sic ut A D, diametri pars, proportionalium prima sit: B D vero, ad A D perpendicularis, datarum continuam seriem claudat: Dico A D, H D, I D, L D, B D, F D, N D, M D, C D esse continuè proportionales.

Demonstratio.



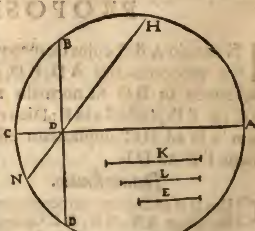
a 3. *tertii.* b 35. *tertii.* c 16. *sexti.*

CUm B D perpendicularis sit ad A C diametrum, [a] B D ipsi D G æqualis est Quia vero [b] rectangula L D F, B D G æqualia sunt, [c] erit L D ad B D ut D G, hoc est B D, ad D F. Sed A D, H D, I D, L D, B D continuè proportionales ponuntur in ratione L D ad B D, in qua quoque continuè proportionales sunt rectæ L D, B D, D F, igitur recta D F erit in eadem serie cum rectis A D, H D, I D &c. Quia vero ulterius proportionales sunt rectæ D G, hoc est, B D, D F, D N, D M in ratione D G ad D F, hoc est L D ad B D patet rectas A D, H D, I D, L D, B D, F D, N D, M D, C D proportionales esse.

PROPOSITIO VIIJ.

DAtum sit intra circulum A B C punctum quodvis D, diameterque per illud transiens sit A C, & B D normalis ad diametrum: Dico omnem rationem, mediam inter rationem A D C & æqualitatis exhiberi posse per rectam H D N, occurrentem perimetro in H & N.

Demonstratio.



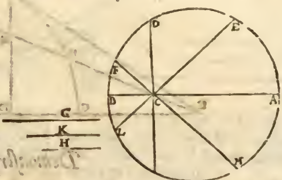
DAta sit quævis ratio K ad E majoris inæqualitatis, minor ratione A D C; inter K & E media sit L, fiatque ut L ad K sic B D ad H D, quæ producta iterum perimetro occurrat in N; Dico rationem H D ad N D eandem esse cum ratione K ad E. Cum enim per elementa quadrato B D æqualis sit rectangulum H D N, patet H D, B D, N D esse proportionales, adeoque ratio H D ad N D duplicata est rationis H D ad B D, hoc est K ad L per constructionem. Sed etiam ratio K ad E ejusdem rationis K ad L duplicata est, igitur ratio K ad E eadem est cum ratione H D ad D N. Quod cum de quavis ratione media dici possit, patet veritas hujus propositionis.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Sit alicujus circuli diameter A B secta utcumque in C non per centrum, ex puncto vero C erecta sit C D normalis ad A B: Dico omnem rationem, quæ media est inter rationem A C B & æqualitatis C D ad C D, exhiberi posse per duas lineas, ex puncto C eductas ad peripheriam, continentes cum perpendiculari C D æquales angulos.

Demonstratio.



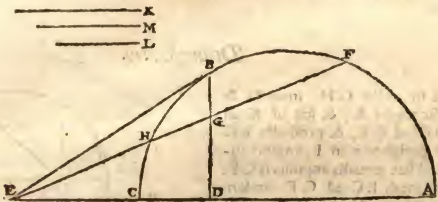
Data sit ratio G H, inter G & H sit media K, & fiat ut K ad G ita D C ad C E, & producta E C occurrat peripheriæ in L, angulo autem L C B fiat æqualis angulus B C F. Dico rationem E C ad C F eandem esse cum ratione G ad H, ac proinde omnem rationem mediam esse assignatam: nam cum ratio G ad H sit ad libitum sumpta, in ipsa ratione G ad H assumpta est omnis media. Quod autem E C F ratio sit æqualis rationi G ad H, sic constabit. Rectangulum E C L per elementa æquale est quadrato D C, proportionales itaque sunt rectæ E C, D C, C L, & ratio DC ad C L æqualis rationi E C ad D C, hoc est G ad K, hoc est K ad H, igitur ex æqualitate ut G ad H ita E C ad C L. Quia vero angulus L C B æqualis est ex constructione angulo B C F, erit C F æqualis C L, & E C ad C F ut C E ad C L, hoc est G ad H. Restat igitur ut ostendamus angulum E C F per C D bisectum esse. Angulo L C B ex constructione æqualis est angulus B C F. Sed angulo L C B æqualis quoque est angulus A C E, igitur anguli B C F, A C E æquales sunt, & quia angulus A C D æqualis est angulo D C B, etiam angulus E C D angulo D C F æqualis est. Patet igitur omnem rationem mediam inter rationem A C B & æqualitatis posse in circulo exhiberi per lineas ex C eductas, continentes æquales angulos cum recta D C.

Corollarium.

Hinc constat, quotiescumque recta D C, normalis ad diametrum A B, bisecat angulum E C F, rectas E C, D C, F C proportionales esse, & contra.

PROPOSITIO X.

Circulum ABC contingat EB, & acta EA per centrum: Dico omnem rationem mediam inter rationem AEC & æqualitatis BE ad BE assignari posse per rectam aliquam ex puncto E ductam, quæ secat circulum in H & F.



Demonstratio.

Data sit quædam ratio KL, quæ minor sit quam ratio AE ad EC, & major ratione æqualitatis, & inter K, L media sit M, & fiat ut M ad K, ita EB ad EF: Dico rationem FE ad EH æqualem esse rationi datæ K ad L, quod sic ostendo. Per Elementa constat rectangulum FEH æquale esse quadrato BE, & consequenter rectas EF, EB, EH proportionales esse. Est autem ex constructione ut M ad K, ita EB ad EF, igitur etiam est ut L ad M ita EB ad EF. Sed ut EB ad EF, ita est EH ad EB, igitur ut L ad M ita EH ad EB. Et ex æqualitate ut L ad K ita EH ad EF, & invertendo ut K ad L ita EF ad EH.

PROPOSITIO XI.

Iisdem positis, demittatur BD normalis ad AC:
Dico ex E duci posse lineam occurrentem perimetro in H & F, rectæ vero BD in G, ut FG ad GH habeat datam rationem mediam inter rationem AEC & BE ad BE rationem.

Demonstratio.

Data sit ratio K ad L media inter rationem AEC & rationem BEB, & per præcedentem ponatur ratio FEH æqualis rationi K ad L: Dico etiam rationem FGH æquari rationi K ad L. Patet ex prop. 2. lib. 1. tom: 1. ubi ostenditur rationem FGH æqualem esse rationi FEH, hoc est rationi K ad L per constructionem.

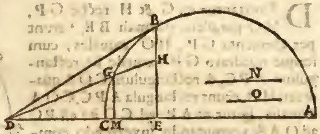
PRO-

PROPOSITIO XIJ.

Recta B D tangens circulum in B, occurrat diametro productæ A C in D, sitque B E normalis ad A D: Dico omnem rationem majorem ratione D E C exhiberi posse per rectam aliquam D H G.

Demonstratio.

Data sit ratio N ad O major ratione D E C, & recta D E dividatur in M, ut ratio D E M æqualis sit rationi N O, & ex M normalis erigatur recta M G, ducaturque D G H. Quoniam ratio D E M major est ratione DEC, erit E C recta major quam recta E M, quare M cadet intra circulum A B C & M G occurret perimetro in G; quia vero tam M G quam E B normalis est ad A C, erunt E H, G M parallelæ, & ratio D H G eadem cum ratione D E M, hoc est N ad O, cum igitur ratio N ad O major ratione D E C pro libitu assumpta sit, patet veritas hujus propositionis.

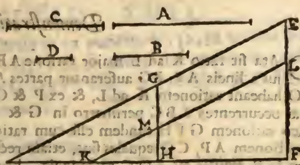


PROPOSITIO XIIJ.

Datæ sint rectæ A, B, & ratio C ad D major ratione A ad B: Oportet a lineis A, B auferre partes æquales, ut reliquæ habeant rationem C ad D.

Constructio & Demonstratio.

Sit recta quædam F K secta in in H, ut ratio F K ad H K eadem sit cum ratione C ad D, ex F & H erigantur F E, H G parallelæ, & æquales ipsis A, B: per E, & G recta ducatur eique ex K parallela K L, dico rectas E F, G H, hoc est A & B, sectas esse in L & M, ut E L, G M æquales sint, & L F ad M H habeat rationem C ad D. Cum enim per constructionem parallelæ sint E F, G H & E G, L K patet [a] E L, G M æquales esse, & [b] rationem L F ad M H eandem esse cum ratione F K ad H K hoc est C ad D.

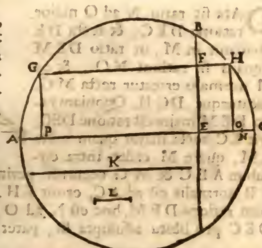


a 34. prim.
b 4. sexti.

PROPOSITIO XIV.

CIrculum, cujus diameter A C, ſecet orthogona B E ut ratio A E C ſit majoris inęqualitatis, & diametro parallela ſit G H, quę ſecet B E in F: Dico rationem G F H majorem eſſe, quam ſit ratio A E C.

Demonſtratio.



DEmittantur ex G & H rectæ G P,
a 34 primi. H O parallelæ normali B E, a erunt
per elementa G P, H O æquales; cum
b 35 tertii. itaque quadrato G P b æquale ſit rectangulum A P C, & rectangulum C O A quadrato H O, erunt rectangula A P C, C O A æqualia, igitur ut A P ad C O ita eſt P C ad O A & permutando, invertendo, componendo, ac iterum permutando erit ut
c 14 quinti A C ad A C ita A P ad C O, c æquales itaque ſunt A P & C O. Demptis igitur
d 13. lib. 2. tom. hujus. æqualibus A P, C O a rectis A E, E C d erit ratio P E ad E O, hoc eſt G F ad F H major ratione A E ad E C; quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

IIſdem manentibus: ſcilicet circuli A B C diameter ſit A C, eique normalis B E: Dico omnem rationem majorem ratione A E C exhiberi poſſe, per rectam G F H parallelam A C & occurrentem perimetro in G & H, rectę vero B E in F.

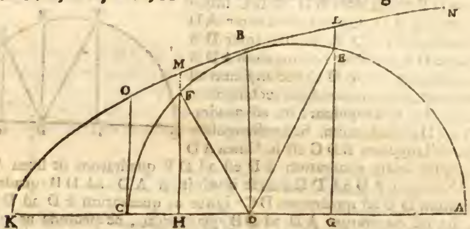
Demonſtratio.

DAta ſit ratio K ad L major ratione A E C, & per propoſitionem 13. hujus a lineis A E, E G auferantur partes A P, C O æquales, ut reliquæ P E, E O habeant rationem K ad L, & ex P & O ponantur rectæ ipſi B E parallelæ occurrentes A B C perimetro in G & H, junganturque G, H puncta; Dico rationem G F H eandem eſſe cum ratione K ad L. Cum enim per con-
a 3. & 35. tertii. ſtructionem A P, C O æquales ſint, etiam rectangulum A P C, hoc eſt a quadratum G P, æquale eſt A O C rectangulo, hoc eſt quadrato H O; igitur etiam rectæ G P, H O æquales ſunt: Sunt autem eædem & inter ſe & rectæ F E
b 33 primi. parallelæ per conſtructionem, igitur etiam b rectæ, G H, P O parallelæ ſunt, & G F ipſi P E æqualis eſt, F H vero æqualis E O. Quare cum per conſtructionem ratio P E O æqualis ſit rationi K ad L, etiam ratio G F H æqualis erit rationi K ad L, unde liquet propoſitum.

PROPOSITIO XVJ.

Circulum A B C secet normalis B D ducta ex puncto diametri D, quod centrum non sit, ducanturque rectę D E, D F, ut anguli E D B, B D F ęquales sint, & proportionales sint A D, E D, B D, D F, D C & ordinatim positę E G, F H:

Dico A G, G D, D H, H C esse in continua analogia.



Demonstratio.

Fiat rectæ D E æqualis G E L, & rectæ D F æqualis H F M, [a] erunt puncta L, B, M ad eandem parabolam: & quia [b] proportionales sunt E D, B D, F D, erunt etiam proportionales L G, B D, M H; unde si punctum K sit vertex Parabolæ L B M, erunt similiter G K, D K, H K proportionales, eritque G K ad D K ut G D ad D H. Quia vero ex natura parabolæ ratio K G ad K D duplicata est rationis L G ad D B, erit etiam ratio D G ad D H duplicata rationis G L ad D B, hoc est A D ad D E, quare si rectis A D, D C æquales fiant A N, C O eæque ordinatim ponantur ad A K, erunt A N, L G, B D, M H, O C proportionales, cum ex constructione proportionales sint rectæ A D, E D, B D, F D, C D. Quia igitur in parabola N B K proportionales sunt A N, L G, B D, M H, O C, etiam proportionales erunt A G, G D, D H, H C. Quod fuit demonstrandum.

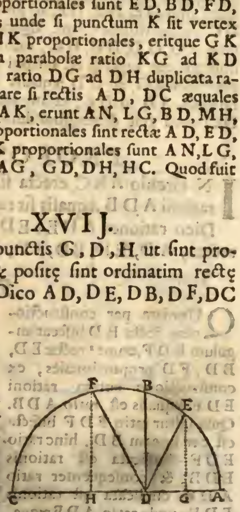
a tom. 1. lib. 5. prop. 301.
b Coroll. prop. 9. hujus.

PROPOSITIO XVIJ.

Diameter circuli A B C divisa sit in punctis G, D, H, ut sint proportionales A G, G D, D H, H C, & positę sint ordinatim rectę G E, D F, H F; junganturque D E, D F: Dico A D, D E, D B, D F, D C lineas eandem rationem continuare.

Demonstratio.

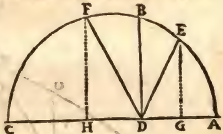
Quod si reducantur omnes illæ lineæ A D, D E, &c. ad suas perpendiculares, uti & in propositione præcedenti factum est orietur parabola, per extremitates illarum transiens. Sed quotiescumque pars axis parabolæ divisa est in partes proportionales, quarum progressionis terminus sit vertex, etiam ordinatim ductæ à talibus punctis sunt in continna analogia. Igitur patet rectas A D, D E, D B, D F, D C esse proportionales.



PROPOSITIO XVIII.

INsistat diametro circuli A B C recta D B ordinatim non in centro, & inter A D, D B media ponatur D E, & E G parallela B D: Dico rationem A G ad G D duplicatam esse rationis ejus, quam habet A D ad D E.

Demonstratio.



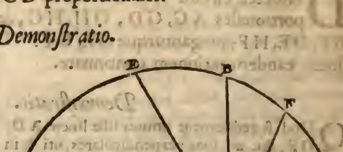
POnatur D F media inter B D, & D C sitque F H parallela B D. Quoniam est inter A D & D B media recta E D, & similiter inter D B & D C media D F, igitur ut rectangulum A D B ad E D quadratum, ita B D C rectangulum ad D F quadratum, & permutando ut rectangulum A D B ad B D C rectangulum, ita est quadratum E D ad D F quadratum. Sed rectangulum A D B ad rectangulum B D C est ut [a] linea A D ad D C, igitur etiam quadratum E D est ad D F quadratum ut linea A D ad D C. Sed [b] ut linea A D ad D C ita est quadratum A D ad D B quadratum, vel quadratum D B ad quadratum D C: igitur ut quadratum E D ad D F quadratum, ita est quadratum A D ad D B quadratum, ac proinde ut est recta A D ad D B, ita quoque linea E D est ad D F, ratio itaque A D ad D C duplicata est rationis E D ad D F: & quia C D, D F, D B ex constructione proportionales sunt, uti & A D, D E, D B, igitur proportionalia etiam sunt rectangula A D C, E D F, B D B. Sed rectangula A D C, B D B æqualia sunt, igitur etiam rectangulum E D F rectangulo B D B æquale est; quare proportionales sunt D E, D B, D F, ac proinde omnes quinque lineæ A D, D E, D B, D F, D C proportionales sunt. Quare, per propositionem 16. hujus proportionales sunt A G, G D, D H, H C, ratio vero G D ad D H propter triangulorum similitudinem æqualis est rationi E D ad D F, hoc est A D ad D B. Igitur etiam ratio A G ad G D æqualis est rationi A D ad D B, quæ cum duplicata sit rationis A D ad D E, etiam ratio A G ad G D duplicata est rationis A D ad D E; quod fuit demonstrandum.

[a] 1. sexti.
[b] ex 20. quinti.

PROPOSITIO XIX.

IN circulo A B C erecta sit orthogona ad diametrum recta D B, & rationi A D B æqualis sit ratio E D F, ut B D bisecet angulum E D F: Dico rationes A D E, E D B, B D F, F D C æquales esse, adeoque rectas, A D, E D, B D, F D, C D proportionales.

Demonstratio.



QUoniam per constructionem recta B D bisecat angulum E D F, erunt [a] rectæ E D, B D, F D proportionales, ex constructione autem rationi E D F æqualis est ratio A D B. Quia igitur ratio E D F bisecta est per lineam B D, hinc ratio E D F duplicata est rationis E D B, & consequenter ratio A D B duplicata est rationis E D B; unde ratio A D E æqualis est rationi E D B, & consequenter sunt omnes rationes æquales, atque adeo ipsæ lineæ proportionales.

[a] 9. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Iisdem manentibus: Dico triangulum A D E ad C D F triangulum triplicatam habere rationem, ejus quam habet triangulum E D B ad triangulum B D F.

Demonstratio.

Ratio trianguli A D E ad C D F triangulum composita est [a] ex ratione A D ad C D, hoc est duplicatâ ratione D E ad D F, & ex ratione D E ad D F: igitur ex triplicata ratione D E ad D F. Sed ratio trianguli E D B ad B D F triangulum [b] eadem est cum ratione D E ad D F, cum rectæ D E, D B, D F proportionales sint. Patet igitur veritas propositionis.

a *Clavius ex Coman: ad prop. 23. sexti.*
b *Coroll. 19 sexti.*

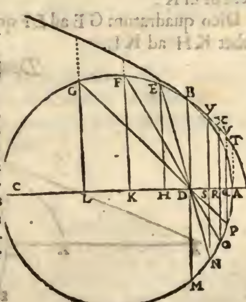
PROPOSITIO XXJ.

In circulo A B C sint D B, D E, D F, D G, D C continuè proportionales, & B D ordinatim ad diametrum, ad quam quoque ponantur E H, F K, G L ordinatim, insuper producantur B D in M, & E D in N, F D in O denique G D in P, & ordinatim ponantur P Q, O R, N S: Dico rectas A Q, Q R, R S, S D, D H, H K, K L, L C eandem seriem continuare.

Demonstratio.

Quoniam proportionalium D C, D G, D F, D E, D B pars diametri D C prima sit, ultima autem ipsa perpendicularis B D [a] erunt rectæ D C, D G, D F, D E, D B. D N, D O, D P, D A in continua analogia; reducantur itaque ad suas perpendiculares A T, Q V, R X, S Y, &c. erunt omnes illæ lineæ proportionales ordinatim positæ in eadem parabola: Sed quotiescumque in parabola ordinatim positæ eandem rationis seriem continuant, etiam partes axis (cum sint in duplicata ratione ordinatim positarum) sunt in continua analogia; Igitur patet rectas A Q, Q R, R S, S D, D H, H K, K L, L C proportionales esse.

a *7. hujus.*

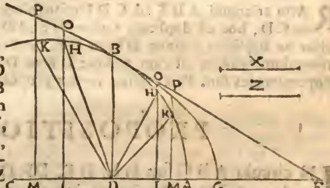


PRO-

PROPOSITIO XXIJ.

CIrculum A B C contingat recta B F diametro productæ occurrens in F, & positâ ordinatim B D, dividatur recta F D bifariam in G, & ex D ducantur quæcumque D H, D K, & ex H & K ordinatim H L, K M; denique fiat ut G L ad D H sic D H ad X, & ut G M ad D K ita D K ad Z:

Dico X & Z lineas æquales esse.



Demonstratio.

PRoductis L H, M K in O & P, ut L O, M P ipsis H D, K D æquales sint, [a] erunt G, K, H, B puncta ad parabolam, quare cum per constructionem G L, D H, hoc est L O & X, item G M, D K, hoc est M P & Z sint proportionales, [b] adeoque tam X quam Z ejusdem parabolæ latus rectum, patet X & Z rectas inter se æquales esse.

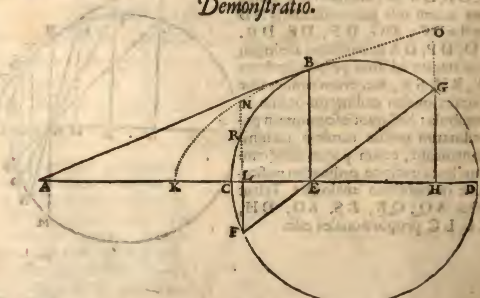
a Tom. 1. lib. 5. prop. 301.
b Ibid. prop. 8.

PROPOSITIO XXIIJ.

COntingat recta A B circulum, cujus diameter C D, in B, ductâque normaliter ad diametrum rectâ B E, ponatur quævis F E G, & F L, G H perpendiculariter occurrant diametro, denique A E bisecta sit in K:

Dico quadratum G E ad E F quadratum eam obtinere rationem, quam habet K H ad K L.

Demonstratio.



REctis E G, E F æquales fiant H O, L N & perpendiculares ad A D, erunt [a] puncta K N B O ad eandem parabolam, cujus axis erit K D; igitur quadratum H O ad L N, hoc est quadratum G E ad E F quadratum, [b] eandem rationem habet quam recta K H ad rectam K L, quod erat demonstrandum.

a Tom. 1. lib. 5. prop. 301.
b Ibid. prop. 1.

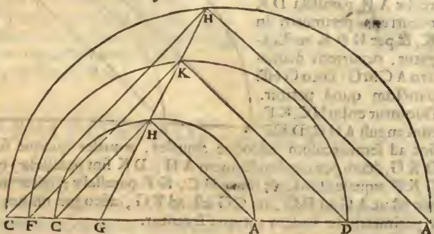
PARS

DE CIRCULIS INTRA SE POSITIS PARS SECUNDA.

PROPOSITIO XXIV.

IN linea diametrali D F circuli D K F sumatur quodvis punctum G intra circulum, & aliud quodvis punctum A intra vel extra circulum, fiatque ut G D ad G A, sic G F ad G C, & quævis G K ad G H: Dico puncta A, H, C esse ad semicirculum cujus diameter est A C.

Demonstratio.



DUctis rectis AH, HC, DK, KF, erunt AH, DK [a] parallelæ (quoniã per constructionem G D est ad G A, ut G K ad G H) & similiter H C, K F lineæ etiam parallelæ erunt. Quare [b] angulus A H G æqualis est angulo D K G, & angulus G H C æqualis angulo G K F, igitur angulus A H C, angulo D K F æqualis est. Sed angulus D K F in semicirculo rectus est, igitur etiam angulus A H C rectus est, adeoque in semicirculo cujus diameter est A C. Quod erat demonstrandum.

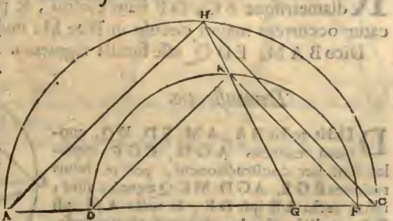
a 1. *sexti.*

b 29. *primi*

PROPOSITIO XXV.

REcta A C divisa sit in punctis D, G, F ut ratio A G D æqualis sit rationi C G F, diametrisque D F, A C circuli discribantur: Dico rectas omnes ex G perimetris occurrentes in eadem ratione secari

Demonstratio.



DUcatur quævis recta ex G occurrens perimetris in K & H, junganturque D K, F K, & ducantur ex punctis A & C, A H, C H. Quoniã itaque parallelæ sunt, rectæ D K, A H, ut patet per præcedentem, erit angulus D K G æqualis angulo A H G, similiter angulo G K F æqualis erit G H C angulus, igitur angulus A H C erit angulo D K F æqualis: Sed angulus D K F rectus est, erit itaque etiam angulus A H C rectus & consequenter ad semicirculum in H: Patet igitur G K esse ad G H ut G D ad G A: Cum vero G H pro libitu ex puncto G educta sit manifestum est omnes rectas ex G eductas perimetris occurrentes in eadẽ ratione secari.

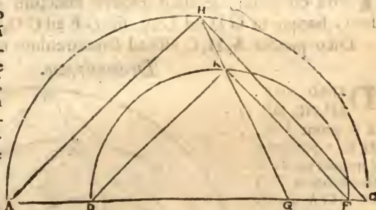
PROPOSITIO XXVJ.

Recta A C divisa sit utcumque in D & F, diametrisque A C, D F descripti sint circuli.

Oportet invenire punctum G ex quo omnes rectæ perimetris occurrentes in eadem ratione secentur.

Constructio & Demonstratio.

Ducatur in circulo A H C, recta quædā A H, quæ minor sit diametro A C; fiat deinde rectæ A H parallela D K occurrens perimetro in K, & per H & K recta agatur, occurrens diametro A C in G: Dico G esse punctum quod petitur. Ducantur enim H C, K F, cum anguli A H C, D K F sint ad semicirculum adeoque æquales, æquales quoque sunt anguli A H G, D K G, (cum per constructionem A H, D K sint parallelæ) etiam anguli G H C, G K F æquales sunt, & lineæ H C, K F parallelæ; igitur ut H G est ad K G, hoc est ut A G ad D G, ita C G est ad F G, adeoque omnes rectæ ex G eductæ a perimetris in eadem ratione secantur.



Corollarium.

Ex discursu hujus propositionis colligitur: si, positis A H C, D K F semicirculis habentibus A C lineam diametralem communem, ducantur quævis A H, D K parallelæ occurrentes perimetris in H & K, & jungantur H C, K F, etiam rectas H C, K F esse parallelas.

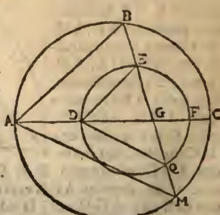
PROPOSITIO XXVIJ.

Recta A C divisa sit in D, G, F, ut rationes A G D, C G F, æquales sint, diametrisque A C, D F fiant circuli, & per G quævis recta ducatur occurrens majori circulo in B & M, minori vero in E & Q.

Dico B A M, E D Q esse similia segmenta.

Demonstratio.

Ductis rectis B A, A M, E D, D Q, quoniam rationes A G D, C G F æquales sunt per constructionem, per 25. hujus rationes B G E, A G D, M G Q æquales sunt; igitur recta A B ipsi D E, & recta A M ipsi D Q parallela est: Anguli igitur ad circumferentias B A G, E D G æquales sunt, adeoque patet ex elementis segmenta BAM, EDQ similia esse.



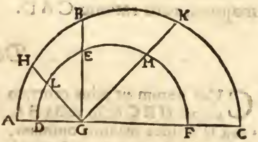
PRO-

PROPOSITIO XXVIIJ.

DUcta sit recta A C per centra circulorum excentricorum A B C, D E F, erectâque normali G B quâcumque in diametro D F, fiant anguli H G B, B G K æquales:

Dico rationes A G D, B G E, C G F, proportionales esse, uti & rationes H G L, B G E, K G M.

Demonstratio.



QUoniam angulos ad G constitutos recta B G bifariam dispescit, igitur proportionales sunt lineæ A G, G B, G C, & D G, G E, G F, & consequenter [a] rationes A G D, B G E, C G F proportionales sunt. Eodem modo demonstrabitur quod rationes H G L, B G E, K G M proportionales sint.

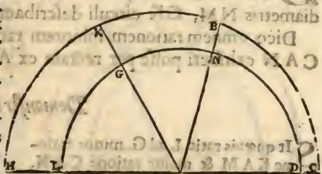
a *Tom. 2. lib. 8. prop. 145.*

PROPOSITIO XXIX.

REcta H C divisa sit in L, A, D, ut A L & A D sint æquales, & ratio C A ad D A minor sit ratione H A ad L A, diametris H C, L D circuli describantur; & ex A rectæ ducantur, quæ circulis occurrant in K, G, & B, N, ut angulus K A C major sit angulo B A C:

Dico rationem K A ad G A majorem esse ratione B A ad N A.

Demonstratio.



QUoniam ex hypothesi ratio H A ad L A, hoc est D A, major est ratione C A ad A D, erit H A major A C, & centrum circuli H B C in recta H A. Est autem recta K A vicinior ipsi H A quam A B eidem H A, cum angulus K A C major sit ex constructione, quam angulus B A C; [b] erit itaque recta K A major quam B A, cumque A sit centrum circuli L G D, erunt A G, A N rectæ æquales; igitur K A ad G A majorem habet rationem quam B A ad N A.

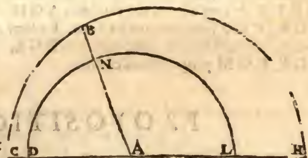
b *7. hujus.*

PROPOSITIO XXX.

SIt iterum recta H C divisa in L, A, D, ut A L, & A D sint æquales, & ratio H A L major ratione C A D, & diametris L D, H C circuli describantur, & ex A recta ducatur, quæ circulis occurrat in B & N:

Dico rationum omnium, quæ lineâ aliquâ ex A eductâ & circulis occurrente exhiberi possunt, maximam esse rationem H A ad L A, minimam C A ad A D, rationem vero B A N minorem esse ratione H A L majorem vero ratione C A D.

Demonstratio.



CUm iterum ut prius centrum circuli H B C sit in recta H A, a erit H A linea maxima omnium, quæ ex A ad perimetrum duci possunt, reliqua vero A C, minima, B A vero minor erit quam H A, major autem quam A C. Cum igitur A sit centrum circuli L N D, & ex eo omnes semidiametri sint æquales, maxima linea H A ad L A, hoc est N A, hoc est D A, maximam habebit rationem; C A vero ad eandem D A minimam: denique B A minor quam H A & major quam C A habebit ad N A, hoc est D A, minorem rationem quam H A ad L A, majorem vero quam C A ad D A.

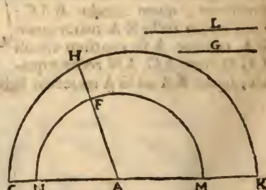
a 7. Tertij.

PROPOSITIO XXXJ.

DIvisa sit recta K C in M, A, N, ut A M & A N sint æquales, & K A ad M A majorem habeat rationem quam C A ad N A, & diametris N M, C K circuli describantur:

Dico omnem rationem minorem ratione K A M & majorem ratione C A N exhiberi posse per rectam ex A circulis occurrentem.

Demonstratio.



SIt quævis ratio L ad G, minor ratione K A M & major ratione C A N. Fiat ut G ad L ita N A ad quartam A H; erit invertendo ratio H A ad A N, hoc est A F, ut L ad G. Quia vero ex hypothesi ratio L ad G, hoc est A H ad F A, minor est ratione K A ad M A, hoc est, F A, major autem ratione C A ad N A hoc est F A, erit linea H A minor quam K A, major vero quam C A, adeoque ut ex 7. tertij colligitur recta H A occurret circulo C H K in H. Patet igitur veritas propositionis.

PRO-

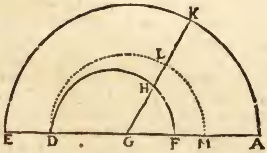
PROPOSITIO XXXIJ.

Recta A E divisa sit in punctis F, G, D, ut ratio A G ad F G major sit Ratione E G ad D G, diametrisque A E, F D circuli describantur, quibus ex G recta occurrat in H & K:

Dico rationem K G ad H G majorem esse ratione E G ad D G.

Demonstratio.

Fiat ut E G ad D G ita A G ad M G & diametro M D describatur semicirculus, qui occurrat rectæ G K in L, [a] erit G K ad G L ut E G ad D G. Quoniam vero ratio E G ad D G, hoc est A G ad M G, minor est ex hypothesi ratione A G ad F G, cadet punctum M inter A & F, quare cum perimeter M L D concurrat cum perimetro F H D in D, reliqua pars perimetri M L D cadet extra circulum F H D ergo punctum L erit extra circulum F H D; igitur ratio K G ad H G major est ratione K G ad L G, hoc est E G ad D G.



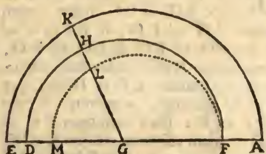
a 25. Hujus.

PROPOSITIO XXXIII.

Iisdem positis: Dico rationem K G ad H G minorem esse ratione A G ad F G.

Demonstratio.

Fiat ut A G ad F G ita E G ad M G, diametroque F M describatur circulus occurrens G K in L, erit [a] G K ad G L ut E G ad M G. Cum autem ex hypothesi ratio A G ad F G, hoc est ex constructione E G ad M G, major sit ratione E G ad D G, erit punctum M inter D & G: Et quoniam perimeter M L F occurrit perimetro D H F in F, pars reliqua perimetri M L F cadet intra circulum D H F, igitur punctum L cadet intra circulum D H F: quare ratio K G ad H G minor est ratione K G ad L G, hoc est A G ad F G: Patet igitur veritas propositionis.



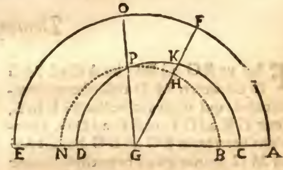
a 25. Hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Recta A E divisa sit in C G D, ut ratio E G ad D G major sit ratione A G ad C G, diametrisque A E, C D circuli sint descripti, quibus ex G duæ rectæ occurrant in punctis K, F, P, O, ut angulus F G A minor sit angulo O G A:

Dico rationem F G ad K G minorem esse ratione O G ad P G.

Demonstratio.



Fiat ut O G ad P G sic A G ad B G, & E G ad G N, & diametro B N circulus describatur: Quoniam ratio O G ad P G, hoc est ex constructione A G ad B G, major est ratione A G ad C G, erit punctum B inter puncta C & G. Cum auté ratio EG ad NG, hoc est OGP, minor sit ratione E G ad D G, cadet punctum N inter puncta E & D, eruntque[a] puncta N, P, B ad semicirculum.

a 24.hujus.

Sed etiam punctum P est ad semicirculum D K C ex constructione, ergo semicirculus N P B secat semicirculum D K C in P: Quare cum ostensum sit punctum B quidem intra circulum D P C, punctum vero N extra eundem cadere, perimeter N P erit extra circulum D K C. Cum itaque angulus F G A ex hypothesi minor sit angulo O G A, cadet recta G F inter O G & A G, occurretque circulo N H B in H intra circulum C K D; Atqui[b] ratio F G ad H G, eadem est cum ratione E G ad N G, hoc est O G ad P G; ratio autem F G ad H G major est ratione F G ad K G, igitur etiam ratio F G ad KG minor est ratione O G ad P G,

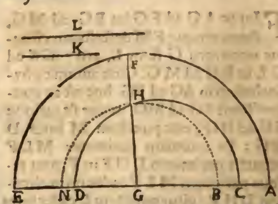
b 25.hujus.

PROPOSITIO XXXV.

Divisâ iterum rectâ A E in punctis C, G, D ut ratio E G ad D G major sit ratione A G ad C G, diametris A E, C D circuli fiant:

Dico omnem rationem minorem ratione E G ad D G, majorem vero ratione A G ad C G poni posse per rectam ex G circulis positis occurrentem.

Demonstratio.



Data sit ratio L ad K, quæ minor sit ratione EG ad DG, major autem ratione A G ad C G, & fiat ut L ad K, ita A G ad B G & E G ad N G, diametroque B N circulus describatur, qui secet circulum D C in H, ex G per H recta ducatur, occurrens circulo A F E in F: Dico rationem F G ad G H eandem esse cum ratione L ad K. Quoniam enim ratio L ad K, hoc est AG ad B G, major est ratione A G ad G C, erit punctum B intra semicirculum D H C: quia vero ratio L ad K, hoc est E G ad N G, minor est ratione EG ad D G, erit punctum N extra semicirculũ D H C quare circulus diametro B N descriptus, necessario secabit circulũ descriptum diametro D C in puncto aliquo H. Cum vero ex constructione ratio A G ad B G, & E G ad N G eadem sit cum ratione L ad K, ratio[a] autem FG ad HG eadem sit cum ratione A G ad BG vel E G ad N G, erit quoque ratio F G ad H G eadé cum ratione L ad K. Cum igitur pro libitu sumpta sit ratio L ad K, media tamen inter rationem E G ad D G & rationem A G ad C G, patet omnem rationem minorem ratione E G ad D G majorem vero ratione A G ad C G poni posse per rectam ex G circulis occurentem: Quod fuit Demonstrandum.

a 25.hujus.

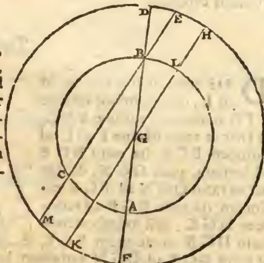
PRO-

PROPOSITIO XXXVJ.

SInt duo circuli concentrici A B C, D G F, & acta H L K per commune centrum, ponatur eidem æquidistans E B M.

Dico rationem H L ad L K minorem esse ratione E B ad B M.

Demonstratio.



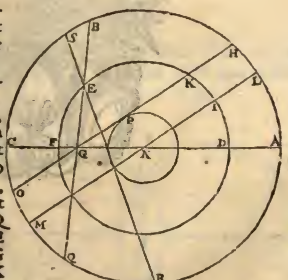
PEr punctumB & cētrum ducatur D F, erit [a] rectangulum E B M ipsi D B F, hoc est H L K æquale. Ergo [b] H L est ad E B ut B M ad L K. [c] B M vero minor est B F, hoc est L K, igitur etiam H L minor est quā E B: atqui H L minimę ad maximam minor est ratio, quam reliquarum E B ad B M. Patet igitur veritas propositionis.

a 35. tertii.
b 16. sexti.
c 7. tertij.

PROPOSITIO XXXVIJ.

SInt circuli concentrici A B C, D E F, & in diametro D F assumpto quovis puncto G, ponatur B G, & inter B G, & G A altera G H: Dico rationem H K ad K G, majorem esse quam sit ratio A D ad D G, minorem vero quam sit B E ad E G.

Demonstratio.



POnatur per centrum commune recta LM ipsi H O parallela, quare erit ut in præcedenti LI, hoc est DA, minor quam H K: Sed D G [a] major est quam K G, igitur H K ad K G majorem habebit rationem quam A D ad D G.

Secundo per E recta ducatur S E R, quæ distat a communi centro N eodem intervallo, quo recta H K O, [b] erunt H K O, S E R æquales. Quoniam vero rectangula S E R, B E Q æqualia sunt, erit S E, hoc est H K, ad B E, ut E Q ad E R, hoc est K O. Sed [c] E Q minor est quam E R, igitur etiam S E hoc est H K, minor est quam B E: K G autem major est quam E G, ergo H K ad K G minorem habet rationem quam B E ad E G. Quod fuit demonstrandum.

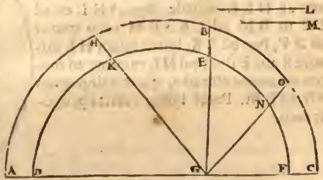
a 7. tertij.
b 14 tertij.
c 7. tertii.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIIJ.

SUmatur in communi diametro duorum circulorum concentricorum punctum G, à quo ducta sit ordinatim ad diametrum recta G B: Dico omnem rationem majorem ratione A D ad D G, & minorem ratione C F ad F G exhiberi posse per lineam ex G eductam, occurrentem circulis.

Demonstratio.



DAtâ enim quâvis ratione M ad L, quæ sit minor ratione C F G, major auté ratione A D G, & [a] fiat ut ratio M cum L ad L ad rationem B G E, ita ratio B G E ad tertiam, puta O G N; deinde fiat ut ratio O G N ad B G E rationem, ita ratio B G E ad rationem H G K, erit transponendo ratio H G K ad rationem B G E, ut ratio B G E ad O G N rationem, hoc est ut ratio M cum L ad L ad rationem B G E, æquales itaque sunt rationes H G ad G K & M cum L ad L, hoc est H G est ad G K ut M cum L ad L; igitur dividendo H K ad K G ut M ad L. Quod licet in particulari ratione factum sit, nihilominus cum illa ratio sumpta sit ad libitum, optimè infertur de quâvis universaliter, ut sonat propositio.

a *Tom. 2. lib. 8. prop. 142. vel 143.*

PARS

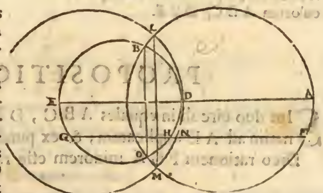
CIRCULORUM PARS TERTIA

De Circulis Secantibus.

PROPOSITIO XXXIX.

SEcent invicem inæquales circuli in punctis B,O, quæ ductâ rectâ jungantur, & A E positæ per centra æquidistet F G: Dico rectam F H majorem esse quam sit A D.

Demonstratio.

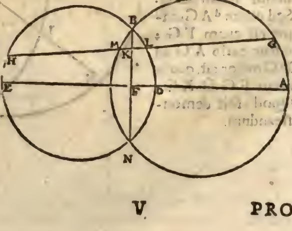


FIat circulo A B O æqualis circulus M D L, sic nimirum ut minorem B D O in D contingat, & centrum habeat in recta A E. Cum igitur ex hypothesi circulus M D L ipso B D O circulo major sit, & tátum in [a] unico puncto (quod D esse supponitur) contingat, reliquæ partes L N M extra circulum B H O cadent ; igitur F H major est quam F N : atqui ob æqualitatem circulorum L F M, L D M, lineæ A D, F N ex hypothesi parallelæ, etiam sunt æquales : igitur F H major etiam est quam AD. a 13. tertii.

PROPOSITIO XL.

SEcent invicem duo circuli A B M, D B E in B & N & ponatur quævis G H occurrens circulis in L & M, rectæ B N autem in K: Dico rationem G K L eandem esse cum ratione H K M.

Demonstratio.



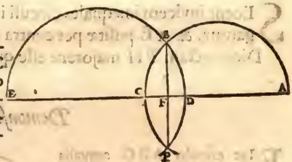
REctangulum G K M [a] æquale est B K N rectangulo, uti & H K L rectangulum, igitur & inter se sunt æqualia rectangula G K M, H K L unde [b] G K est ad K L, ut HK ad KM. a 35. tertii. b 16. sexti.

PROPOSITIO XLI.

SInt proportionales A F ad F E & D F ad F C, & ex F erigatur F B perpendicularis ad A E, tum super diametris A C & D E fiant circuli:

Dico illorum communem intersectionem fore in puncto B, in quo occurrunt perpendiculari F B.

Demonstratio.

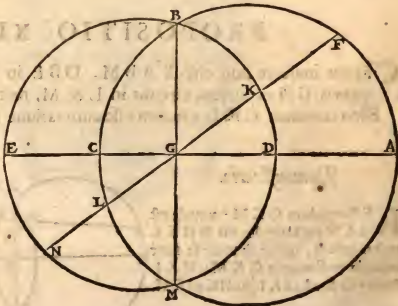


CUm ad diametros ordinatim posita sit F B, erit rectangulũ A F C æquale quadrato B F, & eidẽ quadrato æquale rectangulum E F D; patet igitur punctum B communem esse intersectionem perpendicularis B F, & circulorum A B C, D B E.

PROPOSITIO XLII.

SInt duo circuli inæquales A B C, D B E ad communem B G, ordinatim ad A E applicatam, & ex puncto G educatur quævis G F: Dico rationem F G K minorem esse ratione A G ad G D.

Demonstratio.



PRoducta sit F G in N, [a] erit rectangulum E G D æquale N G K rectangulo. Est [b] autem E G major N G, igitur cum sit [c] E G ad N G, ut K G ad D G, erit quoque K G major quam D G. Sed etiam [d] A G major est quam F G; igitur ratio A G ad D G major est, quam ratio F G ad K G; Quod fuit demonstrandum.

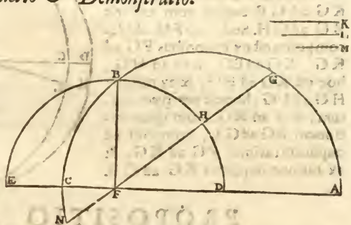
a 35. tertii.
b 7. tertii.
c 6. sexti.
d 7. tertij.

PROPOSITIO XLIIJ.

SInt A B C, D B E circuli sese intersecantes in B, sit autem B F ordinatim ad diametrũ A C posita æqualis radio circuli D B E, dataque sit ratio K L:

Oportet ex F ponere rectam F G, quæ secta sit ut ratio G F ad H F eadem sit cum ratione K ad L, quæ minor sit ratione A F D, major autem ratione æqualitatis.

Constructio & Demonstratio.



FIat M tertia proportionalis ad K & L, & sicut L est ad K, ita fiat F B ad F G, quæ producta occurrat circulo A B C in N; Dico factum quod quæritur. Quoniam F B est ad F G ut L ad K, estque [a] rectangulũ G F N æquale quadrato B F, hoc est F H, uti & rectangulo K M æquale quadratum L, erunt tres lineæ F N, F H, F G in eadem ratione cum lineis K, L, M: Quare perfecimus quod fuit imperatum. a 35. *tertii.*

PROPOSITIO XLIV.

IIsdem manentibus: Dico omnem rationem minorem ratione A F D & majorem ratione æqualitatis exhiberi, posse per lineam eductam ex F & occurrentem circulis in G & H.

Demonstratio.

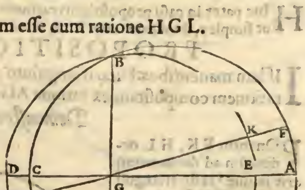
PAtet ex præcedenti propositione, cum enim ratio K ad L data sit pro libitu, dummodo minor sit ratione A F D & major ratione æqualitatis, optimè infertur de quavis universaliter ad sensum propositionis.

PROPOSITIO XLV.

POsitis duobus circulis A B C, E B D sese intersecantibus in B & M, ducatur recta B M, quâ bisecta in G ducatur per G recta quævis circulos secans in F, K, L, H:

Dico rationem F G K, eandem esse cum ratione H G L.

Demonstratio.



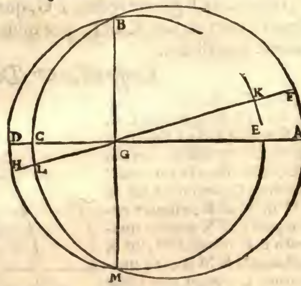
PEr [a] elementa rectangula F G L, K G H æqualia sunt eidem quadrato B G, adeoque inter se æqualia sunt, [b] habentque latera reciproca, hoc est, F G ad K G, ut H G ad L G: Quod fuit demonstrandum. a 35. *tertii.* b 14 *sexti.*

PROPOSITIO XLVJ.

ISdem positis: Dico rationem F G ad G L compositam esse ex duplicata ratione F G ad G K, & ex duplicata ratione K G ad G B.

Demonstratio.

CUm rectangulum K G H quadrato B G æquale sit, erit ratio K G ad G B eadem cum ratione B G ad G H. Sed ratio F G ad G L composita est ex rationibus F G ad K G, K G ad B G, B G ad H G, hoc est K G ad B G, & ex ratione H G ad L G, hoc est per præcedentem, F G ad K G. Patet igitur rationem F G ad G L, componi ex duplicata ratione F G ad K G, & ex ratione duplicata K G ad G B.



PROPOSITIO XLVIJ.

POsitis quæ prius, sit insuper ratio F G ad G L duplicata rationis K G ad H G:

Dico rectas F G, K G, B G, H G, L G esse in continua analogia.

Demonstratio.

CUm ob æqualitatem rectangulorum, F G L, K G H, B G B lineæ F G, B G, L G, item K G, B G, H G sint proportionales, ratio F G ad L G duplicata est rationis F G B. Sed etiam ratio F G ad L G ex hypothesi duplicata est rationis K G ad H G, æquales sunt igitur rationes K G H & F G B: Ratio autem K G H duplicata est rationis K G B, quare etiam ratio F G B duplicata est rationis K G B: proportionales itaque sunt rectæ F G, K G, B G. Sed sicut K G ad B G ita B G ad H G, & ut F G ad K G, hoc est K G ad B G, hoc est B G ad H G, sic H G ad L G: proportionales ergo sunt rectæ F G, K G, B G, H G, L G.

Corollarium.

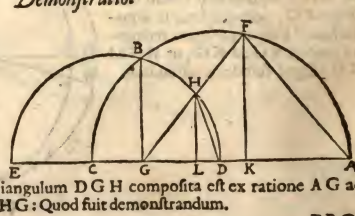
HInc patet in casu propositionis rationes F G K, K G H, F G H, F G L esse ut simplex, duplicata, triplicata, quadruplicata.

PROPOSITIO XLVIIJ.

ISdem manentibus: Dico triangulum A G F ad D G H triangulū habere rationem compositam ex ratione A G ad D G, & ex ratione F G, ad H G.

Demonstratio.

POnantur F K, H L ordinatim ad diametrum; erit itaque [a] ratio trianguli A F G ad D H G triangulum composita ex ratione A G ad D G, & ex ratione F K ad H L. Sed [b] ratio F K ad H L eadem est cum ratione F G ad H G, igitur ratio trianguli A F G ad triangulum D G H composita est ex ratione A G ad D G, & ex ratione F G ad H G: Quod fuit demonstrandum.



[a] *Clavius ad 23. sexti ex Command.*

[b] *ex 2. & 4. sexti.*

PRO-

PROPOSITIO XLIX.

IIsdem manentibus, ſit ratio A G ad C G duplicata rationis F G ad G H:

Dico triangulum A F G ad triangulum D H G triplicatam habere rationem, ejus quam habet recta F G ad H G.

Demonſtratio.

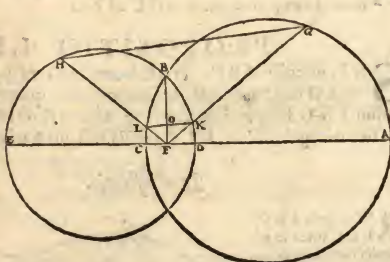
Ratio trianguli A F G ad D H G triangulum, compoſita eſt ex ratione A G ad D G, hoc eſt ex duplicata ratione F G ad G H, & ex ratione F G ad G H. Patet igitur triangulum A F G ad D H G triangulum eſſe in triplicata ratione rectæ F G ad G H. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

Circulos A B C, D B E interſecet per centra, recta A E, & B F ſit ordinatim poſita à puncto in quo ſibi occurrunt circuli. F G vero & F H ponantur ad angulos æquales cum recta A E, junganturque G H, K L:

Dico G H & K L: parallelas eſſe.

Demonſtratio.



Rectangula G F L & H F K [a] quadrato B F æqualia ſunt, atque adeo etiam inter ſe, [b] vnde G F eſt ad F K, ut H F ad F L, igitur [c] G H, K L ſunt parallelæ.

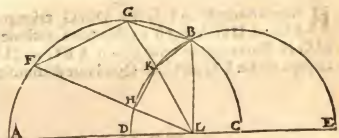
a ex 35. tertij.
b 16. ſexti.
c 2. ſexti.

PROPOSITIO LI.

INtersecent sese circuli A B C, D B E in B, & B L ordinatim positâ ex puncto intersectionis, ducantur L F, L G, ut ratio F L H duplicata sit rationis, G L K:

Dico rationem trianguli F L G ad H L K triangulum triplicatam esse ejus, quam triangulum G L B habet ad triangulum K L B.

Demonstratio.



QUoniam triangula F L G, H L K communem habent angulum, erit [a] triangulum F L G ad H L K triangulum, ut rectangulum sub F L & L G ad rectangulum sub H L, L K. Sed rectangulum F L G ad H L K rectangulum habet rationem compositam ex F L ad L H, hoc est ex duplicata ratione G L ad L K, & ex ratione G L ad L K, igitur rectangulum F L G ad H L K rectangulum triplicatam habet rationem G L ad K L, & consequenter triangulum F L G ad H L K trianglum habet triplicatam rationem G L ad K L. Ratio vero trianguli G L B ad K L B triangulum [b] eadem est cum ratione G L ad K L, ergo ratio trianguli F L G ad H L K triangulum, triplicata est rationis trianguli G L B ad K L B triangulum.

a Clavius ad 23. sexti.

b 1. sexti.

Corollarium.

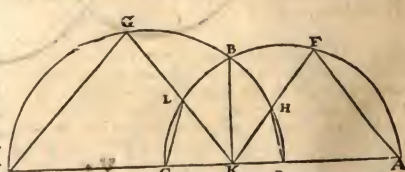
HInc patet quid dicendum sit in casibus, quibus ratio F L ad H L sæpius multiplicata ponitur rationis G L ad K L.

PROPOSITIO LII.

SIt in circulis A B C, D B E secantibus, ex puncto intersectionis recta B K ad diametros ordinatim posita, quæ, ductis K F, K G, angulum F K G bisecet, junganturque A F, G E. D H, C L:

Dico triangula A F K, K L C similia esse, uti & triangula D H K, G K E.

Demonstratio.



REctangula A K C, F K L inter se æqualia sunt, utpote eidem quadrato B K æqualia, igitur [a] A K est ad F K ut K L ad K C, anguli autem A K F, L K C ex constructione æquales sunt; Patet [b] igitur triangula A F K, K L C similia esse. Eodem modo triangula C K E, H K D similia demonstrantur.

a 14. sexti.

b 6. sexti.

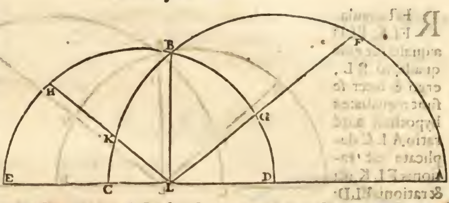
PRO-

PROPOSITIO LIII.

Circulos A B C, D B E sese intersecantes in B, dividat per centra recta A E divisa per orthogonam B L, & puncta D, C, ut ratio A L C majoris inæqualitatis duplicata sit rationis E L D:

Dico rectangulum A L D ad rectangulum E L C eandem obtinere rationem quam habet E L ad L D.

Demonstratio.



Ratio rectanguli A L D ad E L C rectangulum est composita [a] ex ratione A L ad L C hoc est duplicata ratione E L ad L D, & ex ratione L D ad L E. Igitur cum sublata ratione D L ad L E a ratione A L ad L C, remaneat ratio E L ad L D, patet rectangula A L D, E L C esse in ratione E L ad L D. a 23. *sexti.*

PROPOSITIO LIV.

Iisdem manentibus: Dico rectangulum A L D, quadratum B L, & E L C rectangulum esse in continua analogia.

Demonstratio.

Quoniam rectangula A L C, E L D æqualia sunt quadrato B L adeoque æqualia inter se, erit A L ad D L ut E L ad L C. Ratio autem [b] rectanguli A L D ad quadratum B L composita est ex ratione A L ad L B, hoc est L B ad L C, & ex ratione D L ad L B hoc est L B ad L E. Sed etiam ratio quadrati B L ad E L C rectangulum ex iisdem rationibus composita est, igitur rectangulum A L D est ad L B quadratum, ut quadratum L B ad rectangulum E L C, adeoque in continua sunt analogia rectangulum A L D, quadratum B L, & rectangulum E L C. b 23. *sexti.*

PROPOSITIO LV.

Iisdem manentibus: Dico rationem A L ad L B duplicatam esse rationis, quam habet A L ad L E.

Demonstratio.

Ratio A L ad L B eadem est cum ratione L B ad L C, ergo ratio A L ad L C duplicata est rationis A L ad L B. Sed etiam ex hypothesi A L ad L C duplicata est rationis E L ad L D igitur ratio E L ad L D eadem est cum ratione A L ad L B. Cum igitur per penultimam ratio rectanguli A L D ad E L C rectangulum eadem sit cum ratione E L ad L D, etiam eadem erit cum ratione A L ad L B. Quia vero rectangula A L C, E L D æqualia sunt (utpote æqualia quadrato B L) erit A L ad L D ut E L ad L C, adeoque rectangula A L D, E L C similia, & consequenter in duplicata ratione A L ad E L; igitur ratio A L ad L B duplicata est rationis A L ad L E.

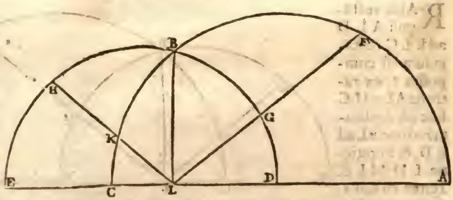
PRO-

PROPOSITIO LVJ.

POnatur ijsdem positis ratio AL ad LC duplicata rationis FL ad LK:

Dico FL & LK lineas æquales esse rectis EL & LD.

Demonstratio.



REctangula FLK, ELD æqualia sũt eidẽ quadrato BL, ergo & inter se sunt æqualia: ex hypothesi autẽ ratio ALC duplicata est rationis FLK, uti & rationis ELD: igitur eadem est ratio FL ad LK, & EL ad LD; similia itaque sunt rectangula FLK, ELD, & ut prius ostensum est etiam sunt æqualia, Patet igitur FL majus latus ipsi EL major lateri, & LK minus latus, minori LD æquale esse; Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVIJ.

POnantur quæ supra: Dico AL, LE, LB, LD, LC esse in continua analogia.

Demonstratio.

PEr præcedentem lineæ FL, LK æquales sunt lineis EL, LD: Est autem ex suppositione ratio ALC duplicata rationis FLK, igitur ratio FLK æqualis est rationi ALB: sed ratio FLK duplicata est rationis FLB proportionales itaque sunt AL, FL, BL. Eodem discursu proportionales ostenduntur BL, KL, CL; ratio autem BL ad KL, hoc est KL ad CL, æqualis est rationi FL ad BL, hoc est AL ad FL; patet igitur proportionales esse rectas AL, FL (hoc est EL) BL, KL (hoc est DL) & CL.

Corollarium.

HInc manifestè colligitur, quod, dum ratio ALC duplicata est rationis ELD, etiam ratio ALC quadruplicata sit rationis ALE, cum quinque illæ lineæ AL, EL, BL, KL, CL sint in continua analogia.

PARS

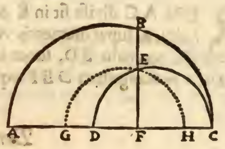
CIRCULORUM PARS QUARTA

De Circulis Tangentibus.

PROPOSITIO LVIIJ.

IN circulo A B C erecta sit B F ordinatim ad diametrum A C, fiatque ut A F ad C F, sic C F ad D F, & diametro D C circulus fiat.
Dico segmentum D E F segmento F B C, & segmentum A B F simile esse segmento E F C.

Demonstratio.



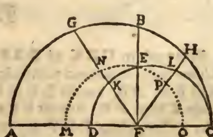
FIat rectæ D F æqualis F H, & rectæ F C æqualis G F, super G H diametro describatur circulus. Cum E F sit normalis ad G C, & rectangulum G F D, hoc est G F H, æquale sit quadrato FE, erunt G E H puncta ad semicirculum. Quia vero ratio A F ad C F, hoc est G F eadem est cum ratione C F, ad D F, hoc est H F, [a] ratio B F ad E F eadem est cum ratione A F ad G F, & per 27. hujus segmentum H E F, hoc est D E F, simile est segmento C B F, segmento vero G E F, hoc est C E F simile est segmentum A B F. Patet igitur veritas propositionis.

a 25. hujus.

PROPOSITIO LIX.

IN circulo A B C erecta sit B F ordinatim ad diametrum A C, fiatque ut A F ad F C, sic C F ad D F, & diametro C D circulus fiat, ex F autẽ ductæ sint rectæ F G, F H, ut anguli G F B, B F H æquales sint.
Dico segmenta A G F, C L F similia esse, uti & segmenta G F C, L F D.

Demonstratio.

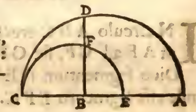


REctæ F C æqualis fiat F M, & F O æqualis F D, diametro M O circulus describatur, patet ut in præcedenti puncta M E O esse ad semicirculum. Sed per constructionem ratio A F ad C F, hoc est M F eadem est cum ratione C F ad D F, hoc est O F, igitur segmenta A G F, M N F, hoc est C L F similia sunt, uti & segmenta G F C, N F O, hoc est L D F; Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LX.

SIt circuli A D C diameter A C secta in B, non per centrum, & erecta sit B D ordinatim: Oportet contingentem circulum describere, ut segmentum A D B simile sit segmento B F C, & consequenter segmentum B D C segmento B F E.

Constructio & Demonstratio.



FIat E B tertia proportionalis ad rectas A B B C, & super E C diametro describatur circulus E F C: Dico factum quod requiritur. Patet per propositionem 58. hujus.

PROPOSITIO LXJ.

REcta A C divisa sit in E & B, ut A B, B C, E B sint proportionales, & super diametris A C, E C descripti sint circuli, quos ex B educta normalis B D, secet in D & F:

Dico rectangulum D B F æquale esse quadrato C B.

Demonstratio.

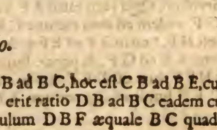
CUm ratio DBC sit subduplicata rationis A B ad B C, hoc est C B ad B E, cujus quoque subduplicata est ratio C B ad B F erit ratio D B ad B C eadem cum ratione C B ad B F; & consequenter rectangulum D B F æquale B C quadrato. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXIJ.

IIsdem manentibus, ducantur ex B rectæ B G, B H quarum angulum bipartiatur recta B D:

Dico rectangula G B K, D B F, H B L esse proportionalia.

Demonstratio.



a 23. sexti. REctangulum G B K ad D B F rectangulum [a] habet rationem compositam ex ratione G B ad D B, hoc est D B ad H B, & ex ratione K B ad F B, hoc est F B ad L B. Sed etiam rectangulum D B F ad rectangulum H B L habet rationem compositam ex iisdem rationibus, nimirum ex ratione D B ad H B, & ex ratione F B ad L B: igitur ratio rectanguli G B K ad D B F rectangulum eadem est cum ratione rectanguli D B F ad rectangulum H B L. Proportionalia itaque sunt rectangula G B K, D B F, H BL.

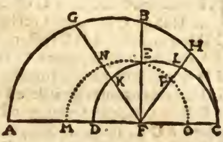
PRO-

PROPOSITIO LXIIJ.

SIt A C divisa in D & F, ut A F, C F, D F sint proportionales, diametrisque A C, D C descripti sint circuli, quos ex F ducta recta non normalis secet in G & K.

Dico rectangulum G F K æquale esse quadrato C F.

Demonstratio.



FIat rectæ F C æqualis F M, & F D æqualis F O, diametro autem M O circulus describatur, & fiat angulus G F H, quem B F normalis ad A C dividat bifariam. Cum igitur ex constructione tam anguli A F G, C F H quam rectæ M F, F C, & D F, F O æquales sint, erunt quoque rectæ N F, L F, & K F, P F æquales: quia vero A F est ad M F, ut C F ad F O, [a] erit etiam ut A F ad M F, ita G F ad F N (hoc est F L) & H F ad F P, hoc est K F: [b] æqualia itaque sunt rectangula G F K, H F L & consequenter medium proportionale rectangulum B F E ad ipsa extrema rectangula necessario habet rationem æqualitatis, hoc est rectangulo G F K, sive H F L æquale est rectangulum B F E, [c] hoc est C F quadratum. Quod erat demonstrandum.

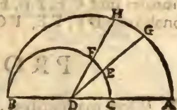
a 25. hujus.
b 16. sexti.
c 62. hujus

PROPOSITIO LXIV.

REcta A B divisa sit in C & D, ut A D, B D, C D sint proportionales, diametrisque A B, C B descripti sint circuli, quos duæ quævis rectæ, ex D ductæ, secent in E, G, & F, H:

Dico G D esse ad H D ut F D est ad E D.

Demonstratio.



REctangulum G D E [d] æquale est quadrato D B. Sed etiam [e] quadratum D B æquale est rectangulo H D F; igitur rectangula G D E, H D F sunt æqualia quare [f] G D est ad H D ut F D ad E D. Quod erat demonstrandum.

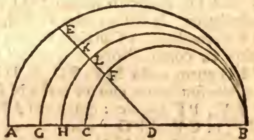
d per præcedentem.
e per eandem.
f 14. sexti.

PROPOSITIO LXV.

REcta A B divisa sit in C & D, ut A D, B D, C D sint proportionales, diametrisque A B, C B describantur circuli, quos recta quævis ex D ducta secet in F & E, inter A C sumatur quodvis punctum G, fiatque ut G D ad A D, sic C D ad H D, diametrisque G B, H B iterum duo circuli describantur secantes rectam D E in K & L:

Dico E D esse ad K D, ut L D ad F D.

Demonstratio.



PEr constructionem A D est ad G D, ut H D ad C D, ergo [a] rectangulum G D H æquale est A D C rectangulo, hoc est [b] quadrato D B, quare G D, B D, H D lineæ sunt proportionales; igitur K D L rectangulum æquale est quadrato B D, cui quoque [c] æquale est rectangulum E D F, igitur rectangula E D F. K D L sunt æqualia, adeoque E D est ad K D, ut L D ad F D.

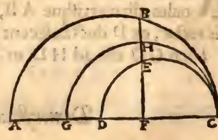
a 16. sexti.
b 17. sexti.
c 63. hujus.

PROPOSITIO LXVJ.

CIrculi A B C, D E C contingentes invicem in puncto C, ita secti sint per F B ordinatim ad diametrum positam, ut figuræ D F E, B F C similes sint;

Dico rectas D F, E F, F C, F B, F A esse proportionales.

Demonstratio.



SIcut D F ad F E, ita est F E ad F C, & quia similia sunt segmenta D F E, B F C ex constructione, etiam est D F ad F E, ut F C ad F B; igitur quatuor sunt proportionales D F, F E, F C, F B, & quia etiam proportionales sunt C F, F B, F A, patet proportionales esse D F, F E, F C, F B, F A.

PROPOSITIO LXVIJ.

ISdem manentibus, è centro F intervallo F C circulus describatur G H C.

Dico tam D F, G F, A F quam F E, F H, F B proportionales esse.

Demonstratio.

PEr Elementa rectæ D F, F E, F C, hoc est F H proportionales sunt, per præcedentem vero rectæ E F, F C, F B proportionales sunt; Patet igitur rectas E F, H F, B F eandem seriem rationum continuare. Sed etiam per præcedentem constat proportionales esse D F, F E, F C (hoc est F G) F B, F A, igitur etiam sunt proportionales D F, F G, F A.

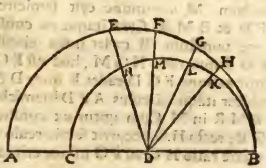
PRO-

PROPOSITIO LXVIII.

Diameter A B divisa sit in C & D, ut A D, B D, C D sint proportionales, & ex D quotvis lineæ ducantur D E, D F, D G, D H, D B eandem continuantes analogiam; & super diametro C B circulus describatur secans proportionales lineas in punctis N, M, L, K:

Dico D E, D F, D G, D H, D B, D K, D L, D M, D N lineas esse continuè proportionales.

Demonstratio.



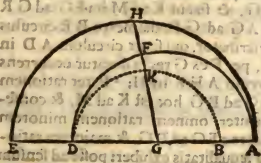
Cum rectangulum H D K [a] æquale sit B D quadrato, ut [b] D H ad D B, ita est D B ad D K; Sed etiam ut D G ad D H, hoc est D H ad D B, hoc est D B ad D K, ita D K est ad D L, & iterum ut D F ad D G, hoc est D H ad D B sive D K ad D L, ita est D L ad D M: denique D M est ad D N, ut D E ad D F, hoc est D H ad D B, hoc est D L ad D M. Patet igitur rectas D E, D F, D G, D H, D B, D K, D L, D M, D N eandem analogiam continuare.

a 63. huius
b 14. sexti.

PROPOSITIO LXIX.

Recta A E divisa sit in punctis G, D utcumque, diametrisque A E, A D circuli describantur, quibus ex G recta occurrat in H & F: Dico rationem H G ad F G minorem esse ratione E G ad D G.

Demonstratio.



Fiat ut E G ad D G, sic A G ad B G, & diametro D B circulus describatur: Quoniam ex constructione punctum B cadit intra circulum A F D, punctum vero D utrique circulo commune est, reliquum perimetri D K B cadet intra perimetrum A F D. Sed ex hypothesi recta H G est supra D G, igitur recta H G occurrit perimetro B K D intra circulum A F D, ergo ratio H G ad F G minor est ratione H G ad K G. Sed [c] ratio H G ad K G æqualis est rationi E G ad D G, igitur ratio H G ad F G minor est ratione E G ad D G: Quod erat demonstrandum.

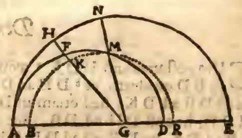
c 25. huius.

PROPOSITIO LXX.

Iisdem positis, ducatur insuper recta G N ut angulus N G E minor sit angulo H G E:

Dico rationem H G ad F G minorem esse ratione N G ad M G.

Demonstratio.



Sicut N G ad M G ita E G fiat ad R G, & A G ad B G, erunt [a] puncta R M B ad semicirculum, cujus diameter erit B R, & punctum M commune erit semicirculis A F D & B M R. Cum itaque ex constructione punctum B cadat intra circulum A F D sitque ratio N G M, hoc est E G R, minor ratione E G D, cadet R inter D & E, secabitur itaque circulus A F D [b] semicirculo B M R in M. Cum igitur ex constructione angulus N G E, minor sit angulo H G E, recta H G occurrit semicirculo B M R intra circulum A F D in puncto K, quare ratio H G ad F G minor erit ratione H G ad K G [b] hoc est N G ad M G.

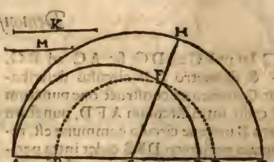
a 24. hujus

b 25. hujus

PROPOSITIO LXXI.

Iisdem positis circulis & puncto G: Dico omnem rationem minorem ratione E G ad D G majorem vero ratione æqualitatis, exhiberi posse per rectam ex G circulis occurrentem.

Demonstratio.



Data sit ratio K ad M majoris inæqualitatis, minor ratione E G ad D G, & fiat ut K ad M ita E G ad G R & A G ad G B; diametro B R circulus describatur, qui secet circulum A D in F, per F ex G recta ducatur occurrens circulo A H E in H; [c] Patet rationem H G ad B G, hoc est K ad M, & consequenter, omnem rationem minorem ratione E G ad D G, & majorem ratione æqualitatis exhiberi posse ad sensum propositionis.

c 25. hujus

PRO-

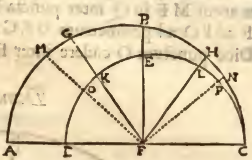
PROPOSITIO LXXII.

Contingant invicem in C duo circuli A B C, D E C, & erecta ordinatim B F, angulum G F H bisecet:

Dico rationem A F D eodem rationis intervallo excedere rationem G F K, quo ratio H F L superat C F C rationem.

Demonstratio.

Ratio A F D [a] ducta in C F C rationem, æqualis est duplicatæ rationi B F E hoc est rationi B F E ductæ in se, cum sint proportionales rectæ A F, B F, C F, & D F, E F, C F & communis C F. Sed etiam sunt proportionales G F, B F, H F, & K F, E F, L F, igitur [b] proportionales sunt rationes G F K, B F E, H F L, quare G F K ratio ducta in rationem H F L æqualis est rationi B F E ductæ in se; igitur ratio A F D ducta in C F C æqualis est rationi C F K, ductæ in H F L rationem, & consequenter ratio A F D est ad rationem G F K, ut ratio H F L ad rationem C F C, ac proinde [c] eodem intervallo rationis superat ratio A F D rationem G F K, quo ratio H F L superat C F C rationem.



a tom. 2. lib. 8. prop. 127.

b ibidem prop. 145.

c 50. lib. 1. tom. hujus

PROPOSITIO LXXIII.

Iisdem manentibus, ponantur rectæ F M, F N, quarum angulum bipartiatur recta F B:

Dico rationem M F O à ratione G F K, differre eodem rationis intervallo, quo differt ratio H F L à ratione N F P.

Demonstratio.

Quoniam tam rectæ M F, B F, N F, & O F, E F, P F, quam G F, B F, H F, & K F, E F, L F proportionales sunt, erunt [a] rationes M F O, B F E, N F P, & G F K, B F E, H F L proportionales, adeoque ratio M F O ducta in N F P rationem æqualis est rationi B F E ductæ in se, cui quoque æqualis est ratio G F K ducta in rationem H F L; æqualis itaque est ratio M F O in N F P rationem rationi G F K ductæ in rationem H F L; igitur ratio M F O est ad rationem G F K, ut ratio H F L ad rationem N F P, hoc est ratio M F O eodem rationis intervallo superat rationem G F K, quo ratio H F L superat rationem N F P.

a tom. 2. lib. 8. prop. 145.

PROPOSITIO LXXIV.

Iisdem manentibus: Dico triangulum M F N ad triangulum O F P eandem habere rationem, quam habet G F H triangulum ad triangulum K F L.

Demonstratio.

Triangulum M F N est ad triangulum O F P, ut [a] rectangulum sub M F & F N ad rectangulum sub O F & F P. Sed [b] rectangulum M F N ad O F P rectangulum habet rationem compositam ex ratione M F ad O F & ex ratione N F ad P F, hoc est, ex ratione M F O ducta in rationem N F P. Similiter ostenditur rationem trianguli G F H ad triangulum K F L eandem esse cum ratione G F K ducta in rationem H F L. Cum igitur ratio M F O in N F P eadem sit cum ratione G F K ducta in rationem H F L, Patet triangulum M F N esse ad triangulum O F P ut triangulum G F H ad K F L triangulum.

a Clavius ad 23. sexti ex Command.

b 23. sexti.

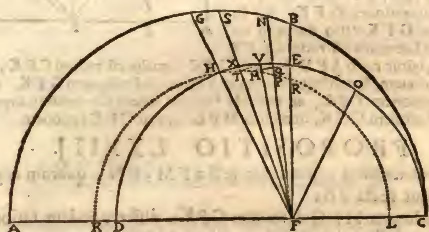
PRO-

PROPOSITIO LXXV.

SInt A B C, D E C contingentes circuli in C, & posita ordinatim F B, ut F C minor sit recta D F, ducta deinde F G, ut ratio G F H media sit inter rationes A F D, B F E: fiant rationi G F ad F H æquales rationes A F K, C F L, & super diametro K L describatur semicirculus K H L, positoque arcu E M intervallo E F, ducatur F N occurrens arcui M E in Q inter puncta M & E, & fiat ut G F ad F H, ita N F ad F O ad perimetrum D E C:

Dico punctum O cadere inter E & C.

Demonstratio.



a 25 *hujus.* QUoniam recta F N occurrant arcui M E in Q, estque[a] ratio B F R æqualis rationi N F P; igitur punctum P est inter puncta M & R, & recta F P minor quam F Q, hoc est F E: Quare si fiat F O æqualis ipsi F P, erit F O linea minor quam sit linea E F. Cadet igitur punctum O inter E & C puncta in arcu E C: Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVI.

SInt eadem quæ prius, & inter puncta H, M in arcu H M P ponatur recta F S, & fiat ut G F ad F H, ita S F ad F V in circulo D E C: Dico punctum V cadere inter puncta H & E.

Demonstratio.

RAdio F T descripto arcu T V ducatur F V; Quoniam X F recta major est quam F T, erit etiam X F major quam recta F V; est autem F T major F M, hoc est F E; igitur recta F V terminatur in puncto V, inter puncta H & E.

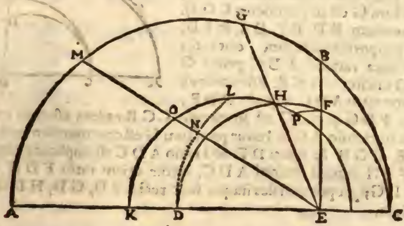
PRO-

PROPOSITIO LXXVIJ.

SInt iterum duo circuli A B C, D F C sese in C puncto contingentes, & normaliter erecta sit E B, & ratio G E H media sit inter rationes A E D & B E F, & fiat ut G E ad E H ita A E ad E K, & per K & H circulus describatur habens centrum in recta A C; denique intervallo E D descripto arcu D L, inter D & L, ponatur quævis E M occurrens arcui D L in N, & fiat ut G E ad E H ita E M ad aliam:

Dico hanc quartam exhiberi non posse per rectam ex E eductam, & terminatam in circulo D F C.

Demonstratio.



QUoniam ex constructione recta E M occurrit arcui D L inter puncta D & L, erit E O major rectâ E N. Cum itaque [a] ratio M E O eadem sit cum ratione G E H, & E O major E N, hoc est E D, quæ maxima est rectarum, quæ ex puncto E educi possunt ad perimetrum D F C, patet rectæ E O æqualem ex E ad perimetrum circuli D F C poni non posse. [a] 52. hujus.

Corollarium.

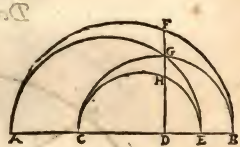
PAtet ex tribus his propositionibus si intervallo E F describatur arcus F P, & similiter intervallo E D arcus D L, quod omnes lineæ protractæ ex puncto E secantes arcum L P quartam proportionalem habere possint, quæ pertingat ex E ad arcum D E C, ita ut exhibeat rationem G E H.

PROPOSITIO LXXVIIJ.

SIt A B divisâ in C, D, E, ut ratio A D C æqualis sit rationi B D E, & erigatur D F ordinatim ad A B, & super diametris A B, C E, A E, C B circuli describantur:

Dico rectam D F in G & H proportionaliter esse divisam, & punctum G esse communem intersectionem circulorum A G E, C G B, & rectæ D F.

Demonstratio.



QUoniam lineæ A D, D F, D B proportionales sunt, uti & C D, D G, D B igitur [a] ratio A D C duplicata est rationis F D G, prout punctum G est in perimetro C G B. Similiter quoniam B D, D F, D A, & E D, D G, D A proportionales sunt, erit ratio B D E duplicata rationis F D G prout G punctum est in circulo A G E. Est autem ex constructione ratio A D C æqualis B D E, igitur ratio F D G prout G est in circulo C G B eadem est cum ratione F D G prout G est in circulo A G E. Igitur punctum G est communis intersectio circulorum A G E, C G B & lineæ D F. Sed ratio A D C est duplicata rationis F D G, & [b] ratio F D H æqualis rationi A D C, igitur etiam ratio F D H duplicata est rationis F D G; proportionales itaque sunt rectæ F D, G D, H D. Quod fuit demonstrandum.

a *Tom. 2. lib. 8. prop. 127.*

b *25. tom. hujus.*

LIBER

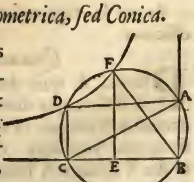
LIBER QUARTUS DE ELLIPSI

AD LECTOREM.

Non raro, etiam inter eos qui Geometricis insudarunt, controversia movetur, utrum hoc vel illud Problema in numerum eorum admitti debeat, quæ Geometrico ritu soluta sunt. Asserunt enim nonnulli nullum Problema Geometrico tenore resolutum dici posse, quod ullo pacto in suo discursu Conicarum sectionum admixtam mentionem involuit. Quo sensu necessarium est, ut asserant, nullum posse dari Problema Geometricum in materia Conica, quæ doctrina valde violenta est, & à sensu Antiquorum Geometrarum prorsus aliena, qui Conicas considerationes eo fine in Geometriam invexerunt, ut quæ vi communis Geometriæ demonstratu difficilia sunt, Conicarum sectionum proprietatibus expedirentur. Operæ pretium itaque judico, rationes Geometricas è proprietatibus Conicarū sectionū eliciciturus, quis de hâc Geometrarum controversiâ sensus sit paucis præmittere.

Primò itaque, dico: Geometrica dari Problemata ex mente omnium Geometrarum, in materia Conica; quæ assertio ita certa est, ut sine Archimedis, Apollonii, & reliquorum antiqui sæculi Geometrarū injuria, de ejus veritate ambigi non possit. Signa autem quæ constructionē Geometricam interventu sectionis Conicæ vitiant, sunt potissima quæ subjungam.

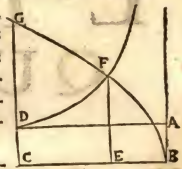
Quandonam constructio aliqua non sit Geometrica, sed Conica.



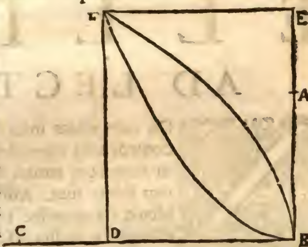
Primo sit v. g. problema propositum: datis duabus rectis A B, B, C; Oporteat duas medias inter illas exhibere. Pro constructione fiat rectangulum sub datis A B, B C, & circulo per puncta A, B, C, descripto, describatur inter asymptotos B A, B C, per punctum D hyperbola, quæ secet circulum in puncto F: Constat A B, B E, E F, B C rectas esse in continua analogia. Vide prop. 138. lib. 6. tom. 2.

Dicitur hæc conſtructio non eſſe Geometrica, eo quod punctum F non ſit inventum, per rectam lineam vel per circulum, à dato ABC diverſum.

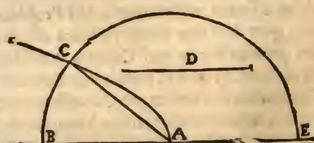
2. Si in eodem problemate pro conſtructione, jubeatur deſcribi parabola, cujus vertex B & latus rectum BC, occurrens circulo prioris ſchematis in F; habebitur punctum F, non ſolum per hyperbolam, ſed etiam per parabolam inventum. Nihilominus necdum pertingit conſtructio ad Geometricum nitorem, ob rationem jam allatam.



3. Si data ſint A B, B C latera recta parabolarum, interquæ duo media proportionalia latera requiruntur, & F punctum interſectionis duarum parabolarum aſſignetur ad ſolvendum problema, hæc conſtructio Geometrica non erit: nam punctum F inventum eſt per ſolam duarum parabolarum interſectionem, non autem per duorum circulorum, aut duarum rectarum, vel circuli vnius cum recta linea.



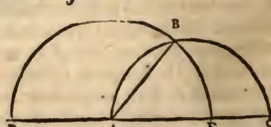
4. Si datâ parabolâ cujus axis A B, quis exigat ex vertice A conſtitui rectam A C æqualem rectæ D, intervallo rectæ D ex centro A, deſcribatur circulus E C B, qui interſecat parabolam in C, tunc Geometricè punctum C inventum non erit, ſed tantum Conicè: Ad inventionem enim puncti C requiritur vel linea vel alius circulus, qui aſſignat per interſectionem communem tam circuli E C B, quam parabolæ A C F, punctum C. Tunc enim coincidit conſtructio, cum ea, quam paulo poſt tamquam Geometricam admittemus.



Atque hi ſunt caſus lineares, qui problematis ſolutionem vitioſam efficiunt.

Quænam ſit Conſtructio Geometrica.

PRimo ſi quis dato circulo A B C, cujus diameter A C datam A B lineam in circulo poſtulaverit conſtitui Geometricè id fiet ſi centro A intervallo A B ſemicirculus deſcribatur, qui occurrat



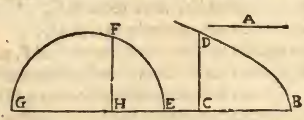
currat ſemicirculo A B C in B. Euclides enim eadem praxi uſus eſt, in ſolutione primi ſui problematis, quo poſtulat ſuper data recta triangulum æqualiterum conſtituere. Et hæc eſt conſtructio per quam *N*.4. punctum C in parabola volumus inveniri, ut Geometricè dicatur inventum.

Priuſquam ulterius hunc diſcurſum proſequar, lubet hic aliquid animadverſione dignũ proponere; ſcilicet: non magis aut minus parabolam eſſe determinatè exhibitam, per exhibitionem ſui lateris recti, neque ellipſim per datos utroſque axes, quam ſit ipſemet circulus dato radio. Quid enim eſt eſſe determinatum in Geometricis, quam aliquid per ſignum aliquod ita eſſe deſignatum, ut illud ab alio prorſus diſtinguatur in ſua ſpecie? Igitur ſi circulum radius ſuus ab omni alio circulo ita diſtinguat, ut per illum ab omni alio dignoſcatur diverſus, cum idem contingat in parabola, idem in hyperbola & ellipſi, neceſſario etiam admitti debet, eſſe tam determinatam parabolam per ſuum latus rectum, & ellipſes, per ſuos Axes, quam quivis circulus per ſuum radium.

Hinc ſequitur, dum datur circulus per exhibitionem ſui radii, non magis Geometricè dari, quam parabola aſſignato ſuo latere recto (cum in talibus aſſumptis nulla conſtructionis Geometricæ vel Conicæ fiat mentio) ſed tantum aliquod Imaginationi formetur idolum, quod alterius Imaginationi volumus explicatum, in ordine ad diſcurſum vel veritatem aliquam illi perſuadendam.

His poſitis, ut ad rem noſtram diſcurſum hunc accommodemus:

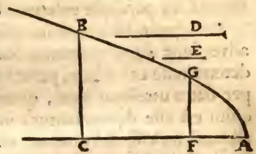
2. Sit A latus rectũ parabolæ, cujus axis B C, & fiat rectangulo ſub A & B C æquale quadratum C D, & erecta ſit C D normalis ad axem B C. Dico D punctum eſſe Geometricè aſſignatum in parabola, cujus latus rectum eſt A. Nam ſicut in circulo EFG, ſi fiat rectangulo E H G ęquale quadratum H F, verè & Geometricè dicitur punctum F exhibitum, eo quod ea proprietas ſit è primariis circuli. Ita quoque in parabola punctum D verè Geometricè dici debet exhibitum, cum illa ſit primaria parabolę proprietas, quæ requirit, ut quadrata ordinatim applicata æqualia ſint rectangulis ſub latere recto, & rectâ B C, quæ eſt diametri intervallum, à cujus termino erigi debet ordinatim applicanda. Hæc aſſertio manifeſtior fiet ſi penitius conſideretur. Aſſeritur enim quod, ſicut circulus tranſiens per puncta E & G rectę EG (ſi EG diviſa ſit in aliquo puncto H, & recta H F media proportionalis inter GH, & EH, ex puncto H erecta ſit normaliter) etiam tranſeat per F: ita quoque datis B C, C D ſibi ad rectos angulos conſtitutis, ſi exhibeatur tertia A, rectè inferri, quod parabola habens verticem B, & latus rectum A tranſeat per punctum D. Unde patet quamvis recta A, quæ pro latere recto parabolæ aſſumitur, determinatam aliquam parabolam aſſignat, eam tamen propriè & in rigore loquẽdo nec Conicè nec Geometricè exhiberi, ante exhibitionem normalis C D. Omnibus autem notum eſt verè & Geometricè inve-



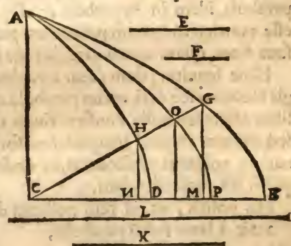
 niri

niri mediam inter A & B C, eamque ex C normaliter erigi posse ad rectam B C; igitur & constat Geometricè inventum esse punctum D, per quod transit parabola, habens latus rectum lineam A & axem B C.

Eodem modo si detur parabolæ A B C latus rectum D, & altera quædam linea E, petaturque constitui recta E ordinatim ad parabolam A B C, si fiat ut quadratum B C ad E quadratum, ita recta A C ad A F, & erigatur F G æqualis E: verè Geometricè assignatum est punctum G, & recta F G est suo loco constituta in parabola, per latus suum rectum determinata. Constat ex natura parabolæ.



Si autem dentur duæ parabolæ, hoc est, si dentur duæ rectæ B C, D C & ex C erecta sit quævis orthogonalis C A, & data sit ratio quædam E F; lineæ autem K & L sint tertiæ proportionales ad D C, C A & B C, G A, & consequenter sint latera recta parabolarum, quæ habeant vertices D, B & communem ordinatim positam C A. Si his positis postuletur duci recta G C, quæ occurrat parabolis in G & H, ita ut secta sit secundũ rationem E ad F, uti nos facimus hic l. 5. de parabola, oportet ratum facere constructionem nostram verè esse Geometricam.



Inventa sunt per constructionem nostram indepenter ab omni mentione Conica (ut patebit suo loco) puncta M & N, quibus inventis fit ut linea D C ad D N ita quadratum A C ad N H quadratum, utque linea B C ad B M, ita A C quadratum ad quadratum G M. Hucusque nulla ullius sectionis Conicæ fit mentio: tamen his positis ostenditur, quod puncta G, H, C, sint in directum, & G & H ad parabolas determinatas, ac datas, denique quod recta G C secta sit in H secundum rationem E ad F. Puncta itaque G & H inventa sunt per rectas M G, N H Geometricè; & consequenter data est verè Geometricè, recta C H G, quæ fuit postulata: Adeoque problema quod, datis duabus parabolis A B C, A D C requirit ex C constitui rectam G C, quæ divisa sit à parabolis secundum datam rationem, verè Geometricè à nobis solutum est.

Verum si ponatur tertia parabola A O P, inquiratur autem an punctum O Geometricè per rectam C G sit assignatum: Respondeo nullo modo id factum: nam illud ullo alio modo inventum non est, quam per lineam ex C eductam; puncta autem G & H exhibita sunt per medias proportionales inter lineas datas D N & L, & B M & K. Quod si perpendicularis ex puncto O ad lineam B C inventa esset, tunc posset etiam dici, punctum O inventum esse Geometricè. Atque hæc sufficere videntur, ut lector intelligat, Problemata, in materia conica à nobis proposita, verè Geometricè esse soluta.

LIBER

DE ELLIPSI

ARGUMENTUM.

Ellipsis proprietates præmisi lib. 4. tom. 1. hoc libro pauca commentus sum, quæ ad scopum, ad quem collimabam, discursum nostrum deducerent. Tentavi itaque per proprietates diametrorum conjugatarum, eo tandem filum deducere, ut inventis tribus rationibus proportionalibus, ad aliquam rationem devenirem, quæ inter duas datas rectas duas medias, imo & quotvis, suppeditaret. Quod quamvis neque hic neque in triangulis aut circulis, neque etiam in parabolis (ut posteà patebit) ex sententia assecutus sum, plurimum tamen hi connatus nostri adjumenti attulêre, ad naturam rationum penitius percipiendam, viasque plurimas apperuêre, quibus insistens ad Universalem diu desiderati problematis solutionem Geometriæ studiosus potest pervenire; ab illis quamvis ætas senio ac morbis afflicta cogit deflectere iisque contentum esse, quibus libro ultimo universale Mesolabium expedire conabimur, spero tamen labores nostros Lectori non ingratos fore.

PARS UNICA.

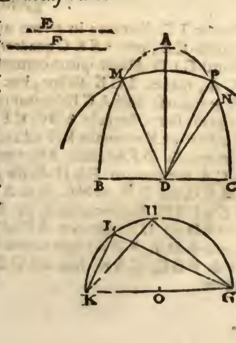
Ex proprietatibus diametrorum conjugatarum variæ rationes eliciuntur.

PROPOSITIO PRIMA.

Sint ABC semiellipseos semiaxes AD, DC & data sit ratio E ad F minor ratione AD ad DC: Oporteat in Ellipsi duas exhibere diametros coujugatas MD, DN, quæ datam habeant rationem E ad F.

Constructio & Demonstratio.

Iungantur ad angulum rectum duæ lineæ GL, LK, ut GL sit æqualis AD & LK æqualis DC, ducaturque GK, quâ divisâ bifariam in O, intervallo GO describatur semicirculus GLK, constat per elem: illum transire per puncta L & K: tum in semicirculo GLK inclinentur duæ lineæ GH, HK ad angulum rectum, quæ datam habeant rationem [a] E ad F: deinde centro D, intervallo GH describatur circulus, patet illum ellipsim secare, quo puncto Geometricè invento per 106. lib. 4. tom. 1. ponatur diameter MD, & illi conjugata DN. Dico MD, DN habere rationem E ad F. Demonstratum id est *tom. 1. lib. 4. prop.* 108.



[a] *Tom. 1. lib. 3. prop. 49.*

Nota

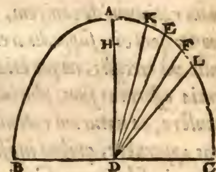
Nota.

SI in quadrante A D C ponatur recta D P æqualis D M, quæ conjugata eſt diametri D N, dicitur P D N ſector ſub diametris conjugatis, non quidem ſitu aut poſitione talibus, ſed tranſlatione ab alio ellipſis quadrante, ad eundem in quo eſt altera conjugatarum.

PROPOSITIO IJ.

SInt A D, D C ſemiaxes quadrantis ellipſeos, & quævis ponatur diametrorum inæqualium conjugatio E D, D F in quadrante A D C: Dico rationem A D ad D C majorem eſſe ratione E D ad D F.

Demonſtratio.



a Tom. 2. lib. 8. prop. 13.
b Tom. 1. lib. 4. prop. 71.

FIat ut F D ad E D ſic C D ad D H,[a] erit ut A D ad H D, ita ratio A D ad D C ad rationem E D ad F D, quia vero E D[b] minor eſt quam A D, & F D major quam D C, factum autem ſit ut F D ad E D, ita C D ad D H, erit D H minor quam A D; igitur & ratio E D ad F D minor eſt ratione A D ad D C. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

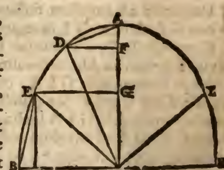
SI in eodem quadrante A D C, ponantur diametri duæ conjugatæ K D, D L, quæ cadant extra ſectorem E D F: erit ratio K D ad D L major ratione E D ad D F. Si vero K D, L D cadant intra ſectorem E D F, erit ratio E D ad F D major ratione K D ad L D. Utriuſque demonſtratio, eâdem fit methodo, quâ præcedens propoſitio demonſtrata eſt.

PROPOSITIO IIJ.

ESto A B C quadrans ellipſeos ſub ſemiaxibus A C, C B & in quadrante quævis diametrorum conjugatio D C, E C, & ex D & E ducantur normales ad axem A C.

Dico ſectores A C D, E C B æquales eſſe, uti & triangula F D C, G E C æqualia.

Demonſtratio.



a Tom. 1. lib. 4. prop. 46.
b Tom. 1. lib. 4. corol. prop. 60.
c Ex 74. & 76. lib. 4. tom. 1.
d tom. 1. lib. 4. prop. 75.
e 15. Sexti.

POnatur I C diameter in altero quadrante, æqualis C E, erit[a] A K C quadrans æqualis quadranti C I D. Ablata igitur commune ſectore I C A, manet I C K ſector, hoc eſt ſector E C B, æqualis ſectori A C D;[b] igitur junctis A D, E B æqualia ſunt triangula A D C, C E B. Demittatur autem ex E normalis E H ad axem C B, & ex D normalis D F ad axem A C,[c] erunt rectæ C B, C A ſimiliter in F & H diviſæ; Quare ut A F ad F C, ita B H, ad H C, & ut A C ad A F ita B C ad B H, & permutando ut A C ad B C, ita A F ad B H: Sed[d] ut A C ad B C ita E H ad D F, igitur ut A F ad B H ſic E H ad D F,[e] æqualia igitur ſunt triangula A D F, E H B: ſunt autem & triangula A D C, C E B inter ſe æqualia, igitur & F D C, C E H, hoc eſt G E C ſunt inter ſe æqualia. Quod fuit demonſtrandum.

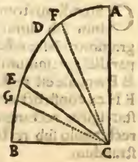
PRO-

PROPOSITIO IV.

Sint A C, C B semiaxes quadrantis ellipsis A B C, in quo quivis ponatur sector sub diametris conjugatis D C, E C.

Dico omnes diametros conjugatas, quæ in quadrante A B C positæ sectorem faciunt majorem D C E, cadere extra sectorem D C E; eas verò quæ minorem constituunt sectorem, cadere intra sectorem D C E.

Demonstratio.



Sit enim quivis sector F C G sub diametris conjugatis, major sectore D C E. Dico latera illius F C, C G cadere extra sectorem D C E. Quoniam enim F C, C G diametri sunt conjugatæ in quadrante ellipseos, erit [a] sector A C F æqualis sectori G C B, est autem ex hypothesi sector F C G major sectore D C E, igitur sectores duo reliqui A C F, G C B minores sunt duobus reliquis A C D, E C B: Quia vero A C D, E C B sectores inter se æquales sunt, erit sector A C F minor sectore A C D, & sector G C B minor sectore E C B, igitur rectæ F C, G C cadunt extra sectorem D C E. Similiter ostendam diametros conjugatas, quæ in quadrante A B C sectores intercipiunt minores ipso sectore D C E, cadere intra D C E. Quod erat demonstrandum.

[a] Per præcedentem.

Corollarium.

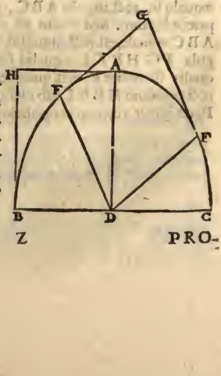
Sequitur ex hac, & ex prop. 2. hujus si sit sector D C E quicumque sub diametris conjugatis, quod ratio D C ad C E sit minima omnium earum rationũ, quas continent latera sectorum, sub diametris conjugatis, majorum sectore D C E; & eadem ratio D C ad C E sit maxima omnium rationum, quæ exhiberi possunt à lateribus sectorum, sub diametris conjugatis, minorum sectore D C E.

PROPOSITIO V.

Sint A D, D B axes ellipseos C A B, & E D, F D, quæcumque diametrorum inæqualium conjugatio;

Dico rectangulum super A D & D B minus esse rectangulo super F D & E D.

Demonstratio.

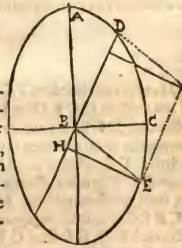


Perficiatur parallelogrammum F G E D in angulo positionis F D E, item rectangulum A H B D: per prop. 72. lib. 4. tom. 1. rectangulum A H B D æquale est parallelogrammo F G E D. Sed parallelogrammum F G E D minus est rectangulo super F D, E D, ut patet ex Elementis, igitur rectangulum A H B D minus est rectangulo super F D & E D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

SInt A B, B C axes Elliptici, & D B, B E diametri conjugatæ, & E H normalis ad D B:

Dico rectangulum sub D B & E H æquale esse rectangulo sub dimidiis axibus A B, & B C.



Demonstratio.

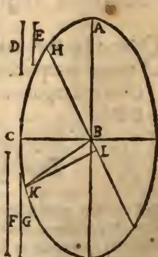
OStendimus tomo primo lib 4. prop. 72. rectangulum sub dimidiis axibus æquale esse parallelogrammo sub semidiametris conjugatis. Sed [a] per Elem: parallelogrammum sub semidiametris conjugatis D B, B E æquale est rectangulo sub rectis D B, E H, cum E H ex constructione normalis sit ad rectam DB. Constat igitur rectangulum sub D B, & E H æquale esse rectangulo sub rectis A B, B C. Quod fuit demonstrandum.

a 36. primi.

PROPOSITIO VII.

DAta sit Ellipsis cujus axes A B, B C: Dico in illa exhiberi posse rectangulo A B C æquale rectangulum, quod constet lineis, quarum una sit minor A B altera major B C, quæ lineæ habeant datam rationem, minorem tamen ratione A B ad B C.

Demonstratio.



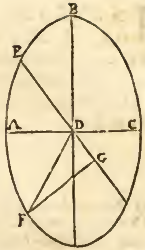
POnatur quævis ratio D ad E majoris inæqualitatis, minor tamen ratione A B ad B C, & fiat rectangulo A B C æquale rectangulum sub ratione D ad E, sitque illud rectangulum F G, & fiat rectæ F æqualis B H, cujus conjugata diameter sit B K, ducaturque K L perpendicularis ad H B: Dico quod rectangulum H B K L æquale sit rectangulo A B C, patet per propositionem præcedentem. Sed etiam ex constructione rectangulo A B C æquale est rectangulum sub F & G, igitur rectangula F G, H B K L æqualia sunt; cum itaque B H æqualis sit rectæ F, erit quoque K L æqualis G, adeoque rectangulum H B K L sub ratione F ad G, hoc est D ad E. Patet igitur veritas propositionis.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Sint lineæ diametrales A D, D E, D B proportionales, & D F conjugata diameter ipsi D E, & F G perpendicularis ad E D:

Dico rectam F G æqualem esse diametro E D.



Demonstratio.

Rectangulum E D F G [a] æquale est rectangulo B D A; quia vero proportionales sunt rectæ A D, D E, D B ex constructione, [b] rectangulum B D A æquale est quadrato D E; igitur etiam rectangulum E D F G æquale est quadrato D E, adeoque E D, F G lineæ æquales sunt.

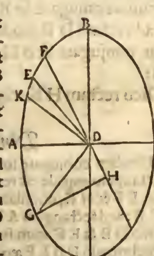
a 6. hujus.
b 17. hujus

PROPOSITIO IX.

Sint iterum lineæ diametrales A D, D E, D B proportionales, & inter E D, & D B media proportionalis sit diameter D F, cui conjugata sit D G, sitque ad D F perpendicularis G H, denique D K media sit inter D E & D A:

Dico rectas G H, D K æquales esse.

Demonstratio.

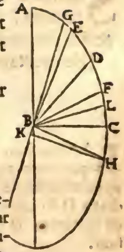


Quoniam conjugatæ sunt F D, D G diametri, & recta G H perpendicularis ad F D, [a] erit rectangulum sub F D & G H æquale rectangulo B D A, hoc est quadrato D E, cum ex constructione A D, D E, D B proportionales sint. Quia vero tam D K media est inter A D & D E, quam recta D F media inter D E & D B, erit quadratum D K ad D F quadratum ut rectangulum A D E ad rectangulum E D B; est [b] autem rectangulum A D E ad rectangulum E D B, ut A D ad D B, igitur quadratum D K est ad quadratum D F ut A D ad D B. [c] Sed quadratum K D ad D F quadratum est in duplicata ratione K D ad D F, igitur ratio A D ad D B duplicata est rationis K D ad D F: sed etiam ratio A D ad D B duplicata est rationis A D ad D E; æquales itaque sunt rationes A D ad D E & K D ad D F: Ratio autem A D ad D E duplicata est rationis K D ad D E, igitur ejusdem rationis K D ad D E duplicata est ratio K D ad D F, & consequenter proportionales sunt rectæ K D, D E, D F, adeoque rectangulum K D F æquale est quadrato D E, hoc est rectangulo D F G H. Patet itaque rectas G H, D K æquales esse.

a 6. hujus.
b 1. sexti.
c 20. sexti

PROPOSITIO X.

IN Ellipsi A B C ponantur in continua analogia rectæ A B, B E, B D, B F, B C, & inter A B, B E media sit B G cujus conjugata sit H B, ex cujus extremo H ducta sit recta H K normalis ad diametrum G B.



Dico rectam H K æqualem esse lineæ quæ est media inter B F & B C.

Demonstratio.

a 6. hujus. REctangulo [a] A B C æquale est rectangulum G B H K; sed rectangulum E B F eidem rectangulo A B C æquale est, igitur etiam rectangulo E B F æquale est rectangulum G B H K. Si autem fiat recta B L media inter B F & B C, tunc quoque rectangulum G B L rectangulo E B F, hoc est G B H K æquale erit, adeoque H K æqualis rectæ B L, hoc est mediæ inter B F, & B C.

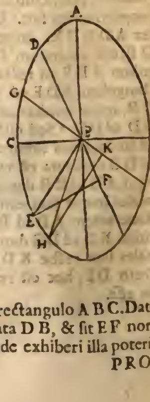
Corollarium.

QUod dictum est duabus hisce propositionibus intelligẽdum est de quovis impari numero diametrorum in continua serie existentium, quæ sunt in serie linearum, quarum maxima & minima sint semiaxes, ut patet discursum propositionum consideranti.

PROPOSITIO XI.

INter extremas diametros Ellipseos, ponatur quævis B D diameter, cujus conjugata sit B E, ex cujus termino E posita sit perpendicularis E F ad rectam D B productam: deinde rectæ E F æqualis fiat diameter B G, cujus conjugata sit B H, ex cujus extremo H ponatur H K normaliter ad G B:

Dico rectam H K æqualem esse rectæ D B.



Demonstratio.

QUoniam conjugatę sunt G B, B H, igitur A B C rectangulo æquale est rectangulum sub G B & H K, hoc est sub E F & H K, quoniam ex constructióne E F æqualis est G B: Sed rectangulo A B C æquale etiam est rectangulum sub D B & E F, cum sint conjugatæ D B, & E B; igitur rectangulo D B E F æquale est rectangulum G B H K, est autem G B æqualis ipsi E F, ergo & D B ipsi H K.

Corollarium.

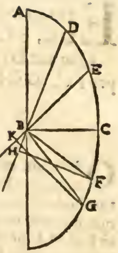
HInc patet, quod datâ quâvis diametro D B in Ellipsi, possit exhiberi altera diameter (non tamen prioris conjugata) cum quâ prior constituat rectangulum æquale rectangulo A B C. Data enim D B major cum sit quam B C, si ponatur B E conjugata D B, & sit E F normalis ad eundem D B, erit E F major quam B C, ac proinde exhiberi illa poterit inter rectas D B, B C.

PRO-

PROPOSITIO XIJ.

SInt in Ellipsi A B C positæ duæ diametri, una D B vicinior axi A B, altera E B remotior ab axe A B, sintque perpendiculares F H, G K:

Dico F H minorem esse quam sit G K.



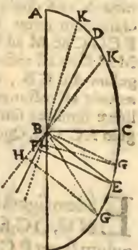
Demonstratio.

ESt enim rectangulum sub D B & F H æquale rectangulo sub E B, & G K, cum utrumque rectangulum rectangulo A B C æquale sit. Est autem D B, vicinior axi, major remotiore E B, igitur cum sit D B ad E B, major ad minorem, ut G K ad F H, erit quoque ratio G K ad F H majoris ad minorem; quare G K major est quam F H. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

ITerum inter A B & B C, axes Ellipseos A B C, ponatur diameter B D, & ejus conjugata sit B E & normalis E F.

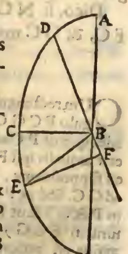
Dico nullam aliam rationem æqualem rationi D B ad E F posse exhiberi inter aliquam diametrum, & normalem ab extremo ejus conjugatæ ad diametrum.



Demonstratio.

SIt enim si fieri possit diameter B K cujus conjugata sit B G, & normalis G H: igitur B K vel cadet inter B A & B D, vel inter B D & B C: Si cadat inter B A & B D erit B K major B D, utpote vicinior axi majori A B, & per præcedentem perpendicularis G H minor quam perpendicularis E F; igitur B K non est ad G H, ut B D ad E F. Si vero B K cadat inter B D & B C, erit B D major B K, E F vero minor rectâ G H, Patet itaque neque tunc B K esse ad G H, ut D B ad E F, & consequenter nullam aliam rationem æqualem rationi D B ad E F posse exhiberi ad sensum propositionis.

PROPOSITIO XIV.



IN data Ellipsi cujus axes A B, B C posita sit quævis diameter B D, cujus conjugata B E, & ex E ad B D normalis sit E F:

Dico rationem A B ad B C compositam esse ex ratione duplicata A B ad B D, & ex ratione D B ad F E.

Demonstratio.

RAtio A B ad B C composita est ex ratione A B ad B D, & ex ratione D B ad F E, & ex ratione F E ad B C. Sed ratio A B ad B D æqualis est rationi F E ad B C, nam rectangulum A B C æquale est rectangulo sub B D & F E. Igitur ratio A B ad B C est composita ex ratione A B ad B D & F E ad B C, hoc est ex duplicata ratione A B ad B D, & ex ratione D B ad F E.

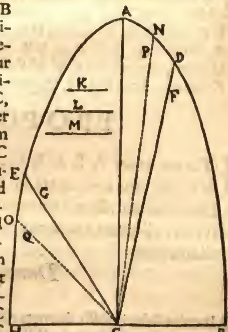
PROPOSITIO XV.

ESto in ellipsi H A B quævis diametrorum inæqualium conjugatio D C, E C:

Oportet D C, E C lineas similiter secare in F & G, ut rectangulum super F C, G C sit æquale rectangulo super A C, & C B.

Constructio & Demonstratio.

OStensum est ª rectangulum super A C, C B minus rectangulo super D C & E C: sit igitur illud ad hoc ut K ad M; & inter K & M inveniatur media proportionalis L; tum D C secetur in F ut D C sit ad F C, ut M ad L, & E C similiter dividatur in G: Cum igitur sit ut D C ad F C, ita E C ad G C, similia erunt rectangula super D C, C E & super F C, C G. Igitur rectangulum super D C & C E est ad rectangulum super F C & G C in duplicata ratione D C ad F C: Est autem ratio D C ad F C eadem cum ratione M ad L, igitur rectangulum D C C E est ad rectangulum F C, G C in duplicata ratione M ad L, sed ratio N ad K duplicata est rationis M ad L, rectangulum igitur D C E C, est ad rectangulum F C G C ut M ad K: Ex suppositione autem ut M ad K ita est rectangulum D C C E ad rectangulum A C C B, rectangulum igitur F C G C æquale est rectangulo A C C B. Igitur D C, E C lineæ similiter sunt divisæ in F & G, ut rectangulum F C G C æquale sit rectangulo A C, C B. Quod erat faciendum.



PROPOSITIO XVJ.

EÂdem figurâ manente: Ponatur alia quævis diametrorum conjugatio N C, O C; sint autem N C, O C similiter divisæ in P & Q, ut rectangulum super P C & Q C sit æquale rectangulo super A C & C B:

Dico, si N C fuerit major quam D C, etiam P C majorem esse rectâ F C, & G C majorem quam Q C.

Demonstratio.

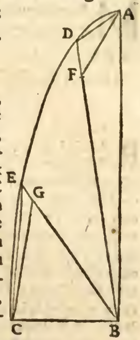
CUm rectangulum A C C B sit æquale tam rectangulo P C, Q C quam rectangulo F C G C, igitur rectangulum P C Q C æquale est rectangulo F C G C, adeoque ut P C ad F C ita G C est ad Q C: Si igitur P C non sit major quam F C, erit æqualis ipsi F C. Quoniam est ut P C ad F C ita G C ad Q C, & P C æqualis, ex suppositione, ipsi F C, erit & G C æqualis Q C: Igitur P C est ad Q C ut F C ad G C. Sed ut P C ad Q C ita N C ad O C (cum N C, & O C similiter sint divisæ in P & Q) & ut F C ad G C ita D C est ad E C, (quia D C & E C similiter divisæ sunt in F & G) igitur ut N C ad O C, ita D C ad E C. Sed ª ratio N C ad O C major est ratione D C ad E C; non igitur P C æqualis est ipsi F C. Similiter ostendetur P C non esse minorem quam sit F C, major igitur ut sit, necesse est. Quia vero est, ut P C ad F C ita G C ad Q C, erit etiam G C major quam Q C. Quod erat demonstrandum.

a Coroll. 2. hujus.

PROPOSITIO XVII.

SIt quadrans ellipticus axium A B C, & ponantur duæ diametri conjugatæ B D, B E, fiat autem rectangulo A B C æquale rectangulum F B G simile rectangulo D B E, junganturque A F, C G:

Dico triangulum A B F æquale esse triangulo C B G.



Demonstratio.

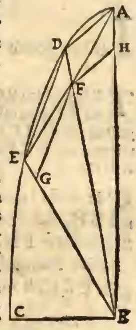
QUoniam rectangulum A B C æquale est F B G rectangulo, ex constructione, [a] A B est ad BF vt B G ad B C. Est autẽ triangulum A B D æquale triangulo E B C, cum ponantur B D, B E diametri conjugatæ [b] triangulum vero A B D est ad triangulum A B F ut recta D B ad B F, utque D B ad B F, ita ex constructione est E B ad B G, & triangulum E B C est ad G B C triangulum ut recta E B ad B G, igitur etiam triangulum E B C est ad triangulum G B C, ut recta D B ad B F, adeoque triangulum A B D est ad triangulum A B F ut triangulum E B C ad G B C triangulum, & permutando ut triangulum A B D ad E B C triangulum, ita triangulum A B F ad triangulum G B E. Cum igitur triangula A B D, E B C æqualia sint, æqualia quoque sunt triangula A B F, G B C. Quod fuit demonstrandum.

a 16 sexti.

PROPOSITIO XVIII.

SIt denuo A B C quadrans ellipticus axium, divisus autem in tres partes æquales per diametros conjugatas B D, B E, & sit rectangulo sub A B, & B C æquale rectangulum sub F B, B G simile rectangulo D B E, ducanturque A F & F G:

Dico triangula A B D, A B F, F B G esse in continua analogia.



Demonstratio.

TRiangulum A B D ad A B F; triangulum est ut recta D B ad B F; igitur cum triangula A B D, D B E æqualia sint (sectores enim A B D, D B E ex constructione æquales sunt) etiam triangulum D B E est ad triangulum A B F in ratione D B ad B F. Ducatur itaque F E, erit quoque triangulum D B E ad F B E triangulum ut D B ad B F, adeoquè triangula A B F, F B E erunt inter se æqualia: triangulum autem F B E est ad F B G triangulum, ut E B ad B G, hoc est ut D B ad B F. Patet ergo triangulum A B D esse ad triangulum A B F ut triangulum A B F, hoc est triangulum F B E ad F B G triangulum; adeoque triangula A B D, A B F, F B G esse in continua analogia.

PROPOSITIO XIX.

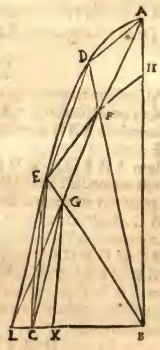
IIsdem positis; ponatur F H æquidistans A D: Dico triangulum H B F æquale esse triangulo F B G.

Demonstratio.

TRiangulum A B D est ad triangulum A B F ut linea D B ad B F, & triangulum A B F ad triangulum H B F est ut recta A B ad H B, hoc est ut D B ad B F (cum ex constructione A D, H F parallelæ sint) proportionalia itaque sunt triangula A B D, A B F, H B F. Sed etiam proportionalia sunt triangula A B D, A B F, F B G per præcedentem; igitur triangula H B F, F B G inter se æqualia sunt. Quod fuit demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XX.



MAnentibus iisdem quæ prius : fiat ut E B ad B G ita C B ad B K, ut que A B ad B D ita B G ad B L:

Dico B K, B C, B L rectas proportionales esse.

Demonstratio.

RAtio A B ad B F eadem est cum ratione B G ad B C, cum rectangula A B C, F B G ponantur esse æqualia. Est autem ratio A B ad B F composita ex ratione A B ad B D, & ex ratione B D ad B F: igitur etiam ratio B G ad B C est composita ex ratione A B ad B D, & ex ratione B D ad B F. Sed ratio B G ad B C composita est ex ratione B G ad B L & ex ratione B L ad B C, estque ratio B G ad B L eadem, ex constructione, cum ratione A B ad B D, igitur ratio B L ad B C eadem est cum ratione B D ad B F, hoc est B E ad B G, hoc est B C ad B K. Patet itaque lineas B K, B C, B L in continua esse analogia.

PROPOSITIO XXI.

IIsdem positis : Dico triangulum B C E æquale esse triangulo B G B L.

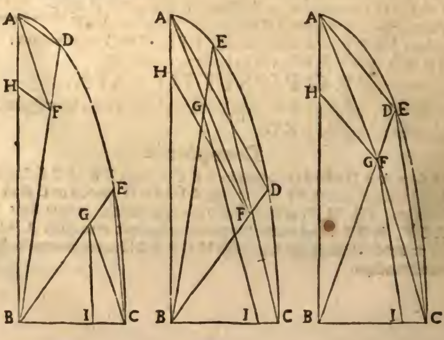
Demonstratio.

TRiangulum B C E est ad triangulum B C G ut recta B E ad B G, hoc est ut B C ad B K, hoc est ut B L ad BC. Sed etiam triangulum B G B L ad B C G triangulum est ut B L ad B C, igitur triangulum B G B L est ad triangulum B C G, ut triangulum B C E ad idem triangulum B C G; æqualia igitur sunt triangula B C E, B G B L.

PROPOSITIO XXII.

SIt A B C quadrans ellipticus axium, & ponantur diametri conjugatæ B D, B E, & ductâ quâvis A F ad B D, fiat ut D B ad B F ita B E ad B G; & ponantur F H, G I parallelæ A D, E G.

Dico triangula A B D, A B F, H B F esse proportionalia, sicut & triangula E B C, B G C, & B G I.

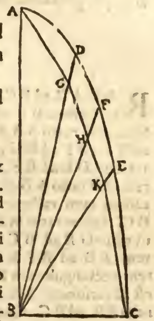


De-

Demonstratio.

TRiangulum A B D ad A B F triangulum est ut B D ad B F, & triangulum A B F ad triangulum H B F est ut A B ad B H; Cum igitur sit A B ad B H ut B D ad B F, erit triangulum A B D ad triangulum A B F, ut triangulum A B F ad H B F triangulum, & consequenter proportionalia sunt triangula A B D, A B F, H B F. Simili discursu patet triangula E B C, B G C, B G I proportionalia esse. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXIIJ.



SIt A B C quadrans ellipticus axium, & ratio AB ad B C duplicata sit rationis D B ad B E diametrorum conjugatarum, ducatur inter B D & B E quævis B F:

Dico rationem A B ad B D esse ad rationem B D ad B F, ut ratio B F ad B E est rationem B E ad B C.

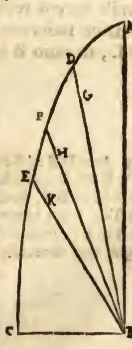
Demonstratio.

RAtio A B ad B C composita est ex ratione AB ad B D, & ex ratione B D ad B E, denique ex ratione B E ad B C. Cum igitur ratio A B ad B C duplicata sit rationis B D ad B E, ex suppositione, ablatâ ratione B D ad B E manet ratio AB ad BD, ducta in rationem B E ad B C, æqualis rationi B D ad B E. Sed etiam ratio B D ad B F ducta in rationem B F ad B E æqualis est rationi B D ad B E; igitur etiam ratio B D ad B F, ducta in rationem B F ad B E, æqualis est rationi A B ad B D ductæ in rationem B E ad B C, adeoque proportionales sunt rationes A B D, D B F & F B E, E B C. Quod fuit demonstrandum.

Corollarium.

HInc colliges si rectæ B D, B E similiter dividantur in G & K, ducaturque GK, quæ secat B F in H, rationem quoque A B ad B G esse ad rationem B G ad B H, ut ratio B H ad B K est ad rationem B K ad B C.

PROPOSITIO XXIV.



IIsdem manentibus: fiat rectangulo A B C æquale rectangulum G B K, sub ratione D B ad B E, & rectangulo A B C æquale etiam fiat quadratum B H:

Dico rectas A B, B G, B H, B K, B C esse in continua analogia.

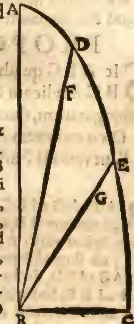
Demonstratio.

QUoniam ratio A B ad B C duplicata est rationis B D ad B E, etiam erit ratio A B ad B C duplicata rationis B G ad B K, adeoque ratio A B ad B G ducta in rationem B K ad BC, æqualis erit rationi B G ad B K: Quia vero rectangulum A B C æquale est rectangulo G B K, erit A B, ad BG, ut B K ad B C: igitur ratio AB ad BG ducta in rationem B K ad B C duplicata est rationis A B ad B G: igitur etiam ratio G B ad B K (quæ æqualis est rationi A B ad B G ductæ in rationem B K ad B C) duplicata est rationis A B ad B G. Denique quia quadrato B H æquale est rectangulum A B C, hoc est rectangulum G B K, erit ratio BG ad B K duplicata rationis B G ad B H. Patet igitur rationes A B ad B G, B G ad B H, B H ad B K, B K ad B C inter se æquales esse, & consequenter rectas A B, BG, BH, B K, B C eandem seriem continuare. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXV.

IN ellipseos A B C quadrante axium sit quævis diametrorum coniugatio D B, B E, & fiat rectangulum F B G æquale A B C rectangulo, simile vero rectangulo D B E.

Dico rationes A B ad B D, A B ad B F & B E ad B C proportionales esse.



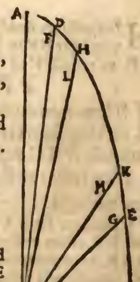
Demonstratio.

RAtio A B ad B C composita est ex ratione A B ad B D, & ex ratione D B ad B E, denique ex ratione B E ad B C. Similiter ratio A B ad B C composita est ex rationibus A B ad B F, B F ad B G, B G, ad B C. Ablata igitur communi ratione D B ad B E, hoc est F B ad B G ex constructione, remanet ratio A B ad B D ductâ in rationem E B ad B C, eadem cum ratione A B ad B F ductâ in rationem G B ad B C. Igitur ratio A B ad B D est ad rationem A B ad B F, ut ratio G B ad B C ad rationem E B ad B C: Rationes autem A B ad B F & B G ad B C æquales sunt, (ob æqualitatem rectangulorum FBG, ABC) igitur ratio A B ad B D est ad rationem A B ad B F, ut ratio AB ad B F, ad rationem E B ad B C. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

IIsdem positis, sint præterea diametri conjugatæ B H, BK, & rectangulũ LBM æquale rectangulo ABC, simile autem rectangulo H B K.

Dico rationem D B ad B H esse ad rationem D B ad B L, ut ratio B M ad E est ad rationem B K ad B E.

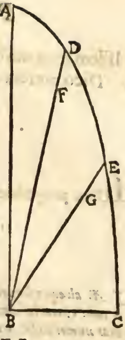


Demonstratio.

a *Tom.* 2. *lib.* 8. *prop.* 7. b *Ibid.* *prop.* 2.

RAtio D B ad BH [a] est ad rationem D B ad BL, ut B L ad B H: & ratio B M ad B E [b] est ad rationem B K ad B E ut B M ad B K. Sed ex constructione B L est ad B H ut B M ad BK: Patet igitur rationem DB ad BH esse ad rationem D B ad B L, ut ratio B M ad B E est ad rationem B K ad B E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.



SIt iterum quadrans ellipticus axium A B C, & ratio A B ad B C triplicata rationis diametrorum conjugatarum D B ad B E.

Dico rationes A B D, D B E, E B C esse proportionales.

Demonstratio.

RAtio A B ad B C componitur ex rationibus A B ad BD, B D ad B E, & B E ad B C: igitur cum ratio AB ad B C supponatur triplicata rationis DB ad B E, ablatâ ratione D B ad B E, erit ratio A B ad B D ducta in rationem B E ad B C duplicata rationis B D ad B E, hoc est ratio A B ad B D ducta in rationem B E ad B C, æqualis erit rationi B D ad B E ducta in se. Proportionales itaque sunt rationes A B ad B D, B D ad B E, & B E ad B C.

PROPOSITIO XXVIIJ.

IIsdem positis; fiat rectangulo A B C æquale rectangulum F B G, simile rectangulo D B E:

Dico A B, F B, G B, C B lineas proportionales esse.

Demonstratio.

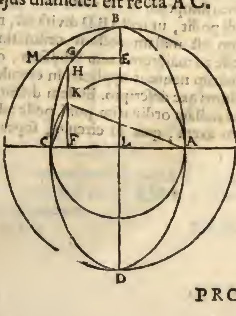
EX constructione ratio F B ad B G æqualis est rationi D B ad B E, cujus triplicata supponitur ratio A B ad B C; igitur etiam ratio A B ad B C triplicata est rationis F B ad B G. Quia vero ratio A B ad B C componitur ex rationibus A B ad B F, B F ad B G, B G ad B C, ablatâ ratione B F ad B G, manet ratio A B ad B F ducta in rationem B G ad B C duplicata rationis B F ad B G. Sed ratio A B ad BF, ob æqualitatem rectangulorum A B C, FBG, eadem est cum ratione B G ad B C, igitur ratio A B ad B F ducta in rationem B G ad BC duplicata est rationis A B ad B F, hoc est B G ad B C, & consequenter rationes AB ad B F, BF ad B G, B G ad B C æquales sunt: unde patet per Elem. rectas A B, F B, G B, C B proportionales esse.

PROPOSITIO XXIX.

SInt ABC ellipseos axes B D, AC quibus proportionaliter divisis in E & F, ducantur ordinatim EG, FH, & recta FH dividatur in K, ut FK æqualis sit rectæ E G:

Dico puncta C K, esse ad circulum cujus diameter est recta A C.

Demonstratio.



QUadratum E G æquale est rectangulo C F A, per 74. lib. 4. tom. 1. proportionales itaque sunt rectæ C F, E G, hoc est F K, & F A, estque F A ex constructione normalis ad C A, jungantur itaque A, K & K, C, erunt triangula A K F, F K C similia, unde anguli A K F, K C F & K A F, F KC æquales sunt; Sunt autem anguli A K F, FAK, hoc est FKC, æquales uni recto, adeoque totus angulus A K C est ad semicirculum cujus diameter A C. Patet igitur veritas hujus propositionis.

PROPOSITIO XXX.

IIsdem manentibus: procudatur E G in M, ut E M æqualis ſit rectæ FH: Dico puncta, B & M eſſe ad circulum cujus diameter B D.

Demonſtratio.

HUjus propoſitionis demonſtratio à priori non differt.

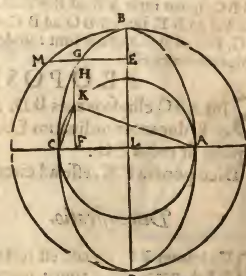
Scholion.

HÆ aliæque ſequentes propoſitiones quamvis propriè ſpectent ad materiam, quam lib. 4. tom. 1. tractavimus, juvat tamen eas hîc adjungere, ne ellipſeos proprietas, non inter poſtremas numeranda, à nobis neglecta videatur, dum illam relinquimus ſtudioſo lectori è propoſitione 74. lib. 4. tom. 1. eruendam. Eſt autem hæc:

PROPOSITIO XXXJ.

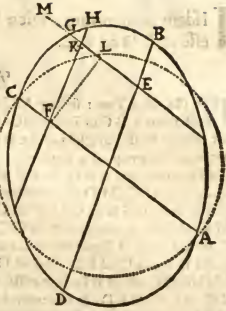
SInt ellipſeos axes, vel diametri conjugatæ B D, A C inæquales. Dico nullam rectam ad axem majorem, vel majorem diametrum ordinatim applicari poſſe, quæ etiam in circulo, ſuper minori axe vel diametro, nequeat ordinatim exhiberi, & contra.

Demonſtratio.



SInt primo B D, A C axes Ellipſis, & recta B D dividatur utcumque in E, utque BD diviſa eſt in E, ita quoque dividatur A C in F, & erigatur per F normalis F H, quâ diviſâ in K, ut F K ſit æqualis E G, patet puncta A, K, C eſſe ad circulū, cujus diameter eſt recta A C, & rectam F K ordinatim applicatam eſſe: Quare cum punctum E pro libitu ſumptum ſit, & recta A C ſemper dividi poſſit, ut recta B D diviſa eſt, manifeſtum eſt nullam rectam ordinatim poni poſſe ad majorem axem Ellipſeos, quæ ordinatim nequeat applicari in circulo ſuper minori axe deſcripto. Eodem diſcurſu conſtat nullam ordinatim poni poſſe ad minorem axem, quæ in circulo, ſuper majori axe, ordinatim poni non poſſit,

Sint



Sint 2. BD, AC diametri conjugatæ inæquales, & ad diametrum BD ordinatim applicata sit GE; diameter vero AC dividatur in F, ut BD divisa est in E, & per F ordinatim applicetur FH, quæ dividatur in K, ut FK rectæ EG æqualis sit. Dico rectam FK, hoc est EG ordinatim poni posse in circulo super minori diametro descripto. Per 74. lib. 4. tom. 1. quadratum EG, hoc est FK, æquale est rectangulo AFC, proportionales itaque sunt rectæ AF, FK, FC; quare si ex F erigatur normaliter FL æqualis FK, hoc est EG, erunt puncta A, L, C ad semicirculum: Quod si vero recta EG producatur in M, ut sit æqualis rectæ FH, poterit methodo jam dictâ, recta EM ordinatim poni in circulo super BD descripto. Patet itaque veritas propositionis.

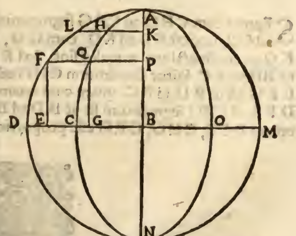
Dixi sint diametri conjugatæ inæquales: si enim æquales sint frustra requiritur illa reciprocatio circulorum cum diametris, cum quadrata ordinatim applicatarum æqualia sint rectangulis sub segmentis diametri, ad quam ordinatim applicantur. Vide prop. 176. lib. 4. tom. 1.

PROPOSITIO XXXII.

Sint AN, CO axes Ellipseos, & radio AB descriptus circulus ADNM, dividantur OC, MD proportionaliter in E & G, & per E & G ordinatim ponantur EF, GQ:

Dico rectas EF, GQ æquales esse, & contra si rectæ EF, GQ æquales sint, dico rectas OC, MD proportionaliter sectas esse in G & E.

Demonstratio.



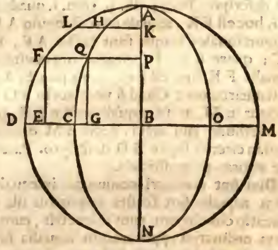
Dividatur AN in K, ut MD divisa est in E; cum rectæ AN, MD æquales sint, erunt quoque rectæ AK, DE, & KN, ME æquales, & rectangulum AKN æquale DEM rectangulo: Sed rectangulo AKN æquale est quadratum GQ, & quadratum EF æquale rectangulo DEM; æqualia igitur sunt quadrata & consequenter rectæ GQ, EF æquales.

Sint autem rectæ EF, GQ æquales: Dico OC, MD proportionaliter esse divisas. Quia enim rectæ EF, GQ æquales sunt erunt æqualia quadratum GQ & rectangulum DEM, divisa autem sit AN in K ut OC in G, erit quoque quadratum GQ æquale rectangulo AKN, æqualia igitur sunt rectangula DEM, AKN: unde DE est ad EM ut AK ad KN, hoc est CG ad GO. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIIJ.

Iſdem manentibus: Dico ſegmentum D F E ad C Q G ſegmentum eſſe ut B D ad B C.

Demonſtratio.

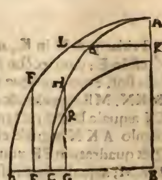


Per 184. *lib.* 4. *Tom.* 1. ſector ABD eſt ad ſectorem A B C ut BD ad BC: Ducatur autem FQP parallela rectæ B C, erit per eandem prop. 184. ſegmentum A P F ad ſegmentum A P Q, ut P F ad P Q. Quia vero O C, M D proportionaliter diviſæ ſunt in G & E, O G eſt ad G C ut M E ad E D, & componendo O C ad G C, ut MD ad ED, & permutando ut O C ad M D ita G C ad E D. Sed ut O C ad M D ita B C eſt ad B D; igitur BC eſt ad B D ut G C ad E D; & invertendo B D ad BC ut E D ad GC, & permutando ac dividendo & iterum permutando ut B E ad B G, hoc eſt F P ad Q P, ita E D ad G C, hoc eſt B D ad B C; Cum itaque P F ſit ad P Q ut eſt B D ad B C, igitur ſegmentum A P F eſt ad A P Q ſegmentum, ut ſector A B D ad ſectorem A B C, igitur & reſiduum trapezium P F D B ad reſiduum P Q C B, eſt ut A B D ſector ad ſectorem ABC, hoc eſt ut B D ad B C. Rectangulum vero B F ad B Q rectangulum eſt ut B E ad B G, hoc eſt vt trapezium P F D B ad trapezium P Q C B, igitur & reſiduum ſegmentum D F E eſt ad reſiduum C Q G ut B D ad B C. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

Iſdem manentibus, dividatur G H in R, ut G R æqualis ſit K Q, & ſuper ſemiaxe B C, per punctum R arcus deſcribatur: Dico ſegmenta D F E, C H G, C R G eſſe proportionalia.

Demonſtratio.



Segmentum C H G ad C R G ſegmentum, eſt ut G H ad G R, hoc eſt K L ad K Q, cum G H, K L, & GR, K Q ex conſtructione æquales ſint. Sed K L eſt ad K Q ut BD ad B C, igitur ſegmentum C H G ad ſegmentum C R G eſt ut B D ad B C, quare cum etiam ſegmentum D F E ad CHG ſegmentum ſit ut B D ad B C patet ſegmenta D F E, C H G, C R G eſſe proportionalia.

LIBER

LIBER QUINTUS DE PARABOLA

ARGUMENTUM.

Quamvis luculenter lib. 5. tom. 1. sectionem parabolicam tractavimus, placuit tamen aliquantulum sectionis hujus contemplationi immorari; cum proprietates parabolicæ non solum infinitas ad mesolabium vias aperiant, verum etiam conferant plurimum ad circuli & hyperbolæ quadraturam percipiendam. Continet igitur hic liber partes tres.

Prima parabolicas proprietates complectitur, ac deinde circulum ex parabola, & contra, deducit.

Secunda vero, positis ad eundem axem duabus parabolis sese intersecantibus (ita tamen ut vertices versus eandem partem habeant) ac ductâ ordinatim lineâ ex puncto intersectionis, tam parabolas quam lineas ex angulo recto parabolis occurrentes considerat. Adjunguntur quoque nonnulla, quæ in hac materiâ de parabolis parallelis dici possunt.

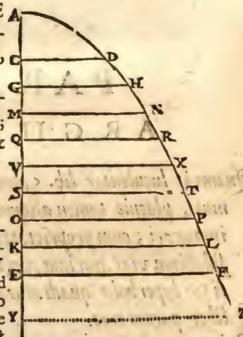
Tertia denique versatur circa parabolas sese intersecantes, & ad eundem axem subcontrariè constitutas. Denique ex parabolis hyperbolæ describuntur.

PARS

PARS PRIMA.

De proprietatibus Parabolicis.

PROPOSITIO PRIMA.



SUmantur in axe parabolæ A F E quotvis partes æquales, numero pares C G, G M, M Q, Q V, V S, S O, O K, K E:

Dico quadrata duarum ordinatim positarum C D, E F; G H, K L; M N, O P; Q R, S T simul sumpta, & inter se, & duplo quadrati V X æqualia esse.

Demonstratio.

FIat rectæ A C æqualis E Y, & sit ordinatim constituta Y Z: igitur cum per constructionem A V, V Y sint æquales, erit A Y dupla ipsius V A. Sed quadratum Y Z ad quadratum V X, est ut Y A ad V A; ergo quadratum Y Z duplo quadrati V X æquale est: sed etiam quadratum Y Z [a] æquale est quadratis duarum quarumlibet ordinatim positarum, quæ ab A & Y distant æqualiter; igitur quadrata duarum C D, E F; G H, K L; M N, O P; Q R, S T æqualiter ab A & Y distantium per constructionem, æqualia sunt duplo quadrati V X, & consequenter æqualia inter se. Quod erat demonstrandum.

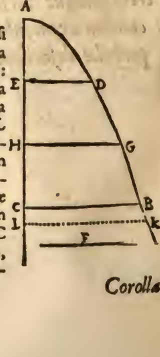
a Tom. 1. lib. 5. prop. 55.

PROPOSITIO II.

HAbeat parabola A B C diametrum A C, ad quam quævis duæ B C, D E ordinatim applicentur, & dimidio quadratorum B C, D E simul sumptorum, fiat æquale quadratum F, & recta F applicetur ordinatim ad diametrum A, sitque G H:

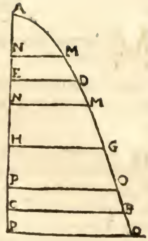
Dico E H, H C lineas æquales esse.

Demonstratio.



SI enim E H, H C æquales non sint, ponatur ipsi E H æqualis H L, igitur per præcedentem quadrata K L, D E simul sumpta æqualia sunt duplo quadrati G H: Sed per constructionem quadrata D E, B C simul sumpta etiam æqualia sunt duplo quadrati G H, igitur quadrata D E, B C simul sumpta æqualia sunt quadratis D E, K L simul sumptis, igitur rectæ B C, K L sunt æquales; igitur ratio quadrati D E ad B C quadratum, eadem est cum ratione quadrati D E ad K L quadratum. Atqui ratio quadrati DE ad B C quadratum, eadem est cum ratione lineæ AE ad AC, & ratio D E quadrati ad quadratum K L eadem est cum ratione A E ad A L, igitur ratio A E ad A C eadem est cum ratione A E ad A L, igitur AC & A L, & consequenter H C, H E æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

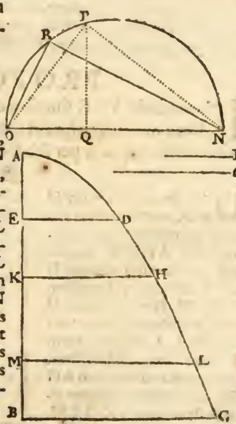


SI in eadem parabola, positis quæ prius, insuper aliæ duę M N, O P ordinatim applicentur, sic ut quadrata M N, O P simul sumpta æqualia sint quadratis D E, B C simul sumptis, erunt etiam E N, P C lineæ æquales: cum enim M N, O P quadrata simul sumpta æqualia sint quadratis D E, B C, simul sumptis, hoc est duplo quadrati G H, erit per hanc propositionem recta N H rectæ H P æqualis. Cum igitur tam H E, H C quam H N, H P æquales sint, etiam differentiæ N E, P C æquales erunt.

PROPOSITIO III.

SIt A B diameter parabolæ A B C, & ad illam ordinatim positæ B C, E D, & data sit ratio F ad G minoris inæqualitatis, major ratione E D ad B C:

Oportet ponere rectas K H, M L in ratione F ad G, ut rectæ E K, B M æquales sint.



Constructio & Demonstratio.

POnantur O R, R N æquales rectis E D, B C, ad angulũ rectũ, ductâque rectâ O N super O N describatur semicirculus O R N, in quo per 49. lib. 3. tom. 1. rectæ O P, P N inclinentur in ratione F ad G, ac denique ordinatim applicentur in parabola rectę K H, M L ipsis O P, P N æquales: Dico factum quod petitur: Rectæ enim O P, P N, hoc est K H, M L ex constructione eandem habent rationem quam F ad G. Quia vero [a] quadrata O P, P N æqualia sunt quadrato O N, hoc est quadratis O R, R N, hoc est quadratis E D, B C, erunt etiam quadrata K H, M L æqualia quadratis E D, B C; igitur per corollarium propositionis præcedentis rectę E K, B M æquales sunt. Fecimus itaque quod fuit præstandum.

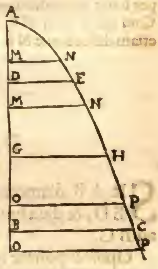
a 47. pri. 1 eri.

PROPOSITIO IV.

MAnentibus parabolâ A B C diametro A B, ac ordinatim positis B C, D E.

Dico omnem rationem possibilem exhiberi posse per duas ordinatim positas M N, O P, sic ut D M, B O sint æquales.

Demonstratio.



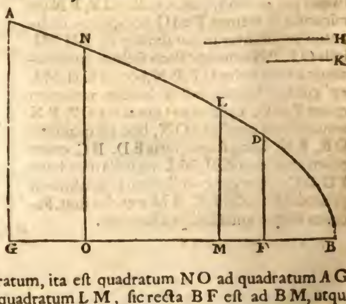
RAtio in parabola A B C ponenda ad sensum propositionis vel erit major vel minor ratione D E ad B C. Si major: patet illam per rectas aliquas M N, O P exhiberi posse ut D M, B O æquales sint. Vide propositionem præcedentem ubi docuimus rationem datam pro libitu, majorem tamen ratione E D ad B C, in parabolam ponere ut rectæ E K, B M æquales sint.

Si vero ratio data minor sit ratione D E ad B C, servatâ constructione præcedentis problematis, prodibit ratio petita in parabola per rectas M N, O P, ita ut M D, O B æquales permaneant, non secus ac ratio minor ratione D E ad B C. Sive enim ratio minor sive major sit ratione D E ad B C, utrobique ex constructione quadrata M N, O P simul sumpta æqualia sunt quadratis D E, B C simul sumptis, quo casu ostensum est rectas D M, B O æquales esse. Manifestum itaque est in parabola A B C omnem rationem possibilem poni posse, per duas ordinatim positas M N, O P, sic ut D M, B O sint æquales.

PROPOSITIO V.

IN parabola A B G sint duæ ordinatim ad axem positæ D F, A G: Dico omnem rationem mediam inter rationem D F ad A G & æqualitatis exhiberi posse, per subdivisionem axeos in partes proportionales.

Demonstratio.



DAta sit quævis ratio H ad K, quæ sit minor ratione æqualitatis, & fiat rectangulo A G D F æquale rectangulum sub ratione H ad K scilicet rectangulum N O L M. Dico rationem H ad K exhibitam esse per rectas N O, L M, quæ axem dividant proportionaliter. Cum enim rectangulum A G D F per constructionem æquale sit rectãgulo N O L M, igitur [a] ut est D F ad L M ita N O est ad A G, adeoque ut quadratum D F ad L M quadratum, ita est quadratum N O ad quadratum A G. Sed [b] ut D F quadratum est ad quadratum L M, sic recta B F est ad B M, utque N O quadratum ad quadratum A G, hoc est D F quadratum ad L M quadratum, ita B O est ad B G; Patet igitur omnem rationem mediam inter rationem A G ad D F & æqualitatis exhiberi posse, per subdivisionem axes in partes proportionales.

a 16. *sexti.*

b 1. *lib.* 5. *tom.* 1.

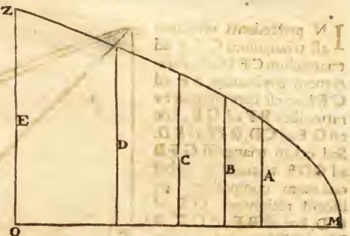
PRO-

PROPOSITIO VJ.

SIt parabola M Z O, & ad ejus axem ordinatim positæ A, B, C, D, E sint proportionales continuè.

Dico segmenta A B, B C, C D, D E esse in continua analogia.

Demonstratio.



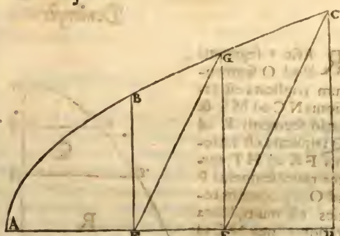
PEr 241. lib. 5. tom. 1. parabola M A ad parabolam M B habet triplicatam rationem A ad B, & parabola M B ad M C parabolam habet triplicatam rationem B ad C, hoc est A ad B: item parabola M C ad M D parabolam habet triplicatam rationem C ad D, hoc est A ad B: denique M D parabola ad parabolam M E habet triplicatam rationem D ad E, hoc est A ad B, igitur parabolę M A, M B, M C, M D, M E sunt in continua analogia. Sed per 1. lib. 2. tom. 1. illarum parabolarum differentiæ A B ad B C, B C ad C D, C D ad D E eandem rationem habent quam totæ parabolæ, hoc est triplicatam, igitur segmenta A B, B C, C D, D E sunt in continua analogia.

PROPOSITIO VIJ.

SInt in parabola A B C proportionales A F, A E, A D & ordinatim positis D C, E G, F B ponantur C E, F G:

Dico segmentum parabolicum B F E G ad G E D C segmentum eam habere rationem, quam triangulum G F E, ad C E D triangulum.

Demonstratio.



PEr præcedentem segmẽtum B F E G est ad segmentum G E D C in triplicata ratione B F ad G E. Triangulum autem G F E ad C E D triangulum [a] habet rationem compositam ex F E ad E D, [b] hoc est A F ad A E, hoc est duplicata ratione rationis B F ad G E, & ex ratione G E ad C D, hoc B F ad G E, quare ratio trianguli G F E ad triangulum C E D triplicata est rationis B F ad G E, adeoque ut triangulum G F E ad C E D triangulum, ita est segmentum parabolicum B F E G, ad segmentum G E D C. Quod fuit demonstrandum.

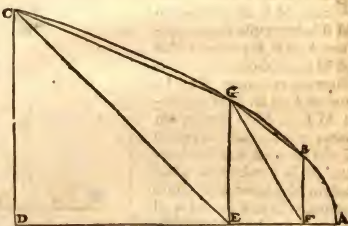
a Clavius ex Commandino.6. ad prop.23. sexti.
b 1. lib. 2. tom. 1.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem manentibus ducantur CG, GB:

Dico triangulum CGE ad GBF triangulum eam habere rationem, quam CED triangulum ad triangulum GEF.

Demonstratio.



IN præcedenti ostensum est triangulum GEF ad triangulum CED habere rationem triplicatam BF ad GE hoc est compositam ex rationibus BF ad GE, hoc est GE ad CD, & FE ad ED. Sed etiam triangulũ GFB ad CGE triangulum habet rationem compositam ex iisdem rationibus GE ad CD, hoc est BF ad GE, & FE ad ED: igitur triangulum GEF ad CGE triangulum est ut triangulum GEF ad triangulum CED, & invertendo triangulum CGE ad GBF triangulum est ut CED triangulum ad triangulum GEF. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

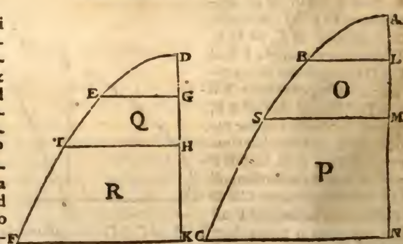
Sint in parabolis ABC, DEF proportionales lineæ LB, MS, NC item GE, HT, KF:

Dico rationem segmenti P ad O segmentum toties multiplicatam esse rationis lineæ NC ad MS; quoties ratio segmenti R ad Q segmentum multiplicata est rationis lineæ KF ad HT.

Demonstratio.

a 272. lib. 5. tom. 1.

Ratio [a] segmenti P ad O segmentum triplicata est rationis NC ad MS, & ratio segmenti R ad Q triplicata est rationis FK ad HT, igitur ratio segmenti P ad O segmentum toties est multiplicata rationis lineæ NC ad MS, quoties ratio segmenti R ad Q segmentum est multiplicata rationis lineæ KF ad HT. Quod fuit demonstrandum.



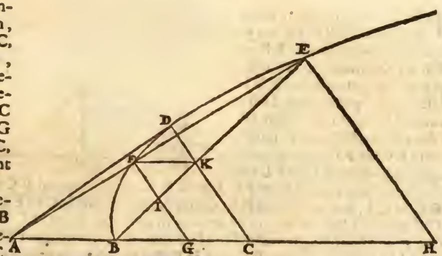
PROPOSITIO X.

IN data parabola B D E sit latus rectum B C inserviens diametro B H, ad quam ordinatim applicetur C D, recta quoque D A tangens parabolam in D occurrat diametro H B in A, & ex A ducta quævis recta secet parabolam in punctis F & E, sintque F G, E H parallelæ ipsi D C: denique ducatur recta E B:

Dico G I, G B, G F, D C, E H, B H eandem analogiam continuare.

Demonstratio.

CUm per constructionem, B C, [a] hoc est D C, sit latus rectum, inserviens diametro B H, erit rectangulum D C B G quadrato F G æquale; igitur B C, F G, D C sunt proportionales. Eodem modo rectangulū D C H B quadrato E H æquale est, & D C,



E H, H B eandem analogiam continuant. Quoniam vero D A tangens parabolam B D E, & E A secans eandem parabolam conveniunt in diametro H A, [b] ratio F G ad D C, hoc est B G ad F G, eadem est cum ratione D C ad E H, hoc est E H ad H B. Sed etiam I G ad G B [c] eandem rationem habet, quam E H ad H B; igitur I G, G B, G F, D C, E H, B H eandem continuant analogiam.

a 9. lib. 5. tom. 1.

b 105. lib. 5. tom. 1.

c 4. sexti.

PROPOSITIO XI.

POsitis quæ prius, jungantur puncta F, K:
Dico F K, B C parallelas esse lineas.

Demonstratio.

PEr præcedentem I G, G B, G F, D C, E H sunt proportionales continuè, igitur inter I G & E H media proportionalis est F G. Sed etiam B G, B C, B H proportionales sunt, cum duplicatam rationem habeant ordinatim positarum F G, D C, E H: quare I G, K C, E H sunt proportionales, & K C media est proportionalis inter I G & E H: Cum itaque recta F G etiam sit media proportionalis inter I G & E H, rectæ K C, F G æquales sunt, cumque per constructionem K C, F G parallelæ sint, necesse est F K, B C, illarum extrema ad easdem partes jungentes, parallelas esse. Quod fuit demonstrandum.

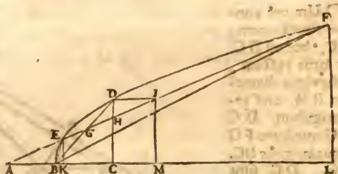
 PRO-

PROPOSITIO. XIJ.

Sit parabolæ B D F diameter B L, ad quam E K, D C, F L ordinatim positæ sint proportionales, sitque D C lateri recto æqualis, ductaque recta per F & E occurrat axi in A: denique ducantur F B, D B, E B, & D I ducatur axi parallela:

Dico rationes E G F, E H F, E I F, eam habere proportionem quam triplicata, duplicata & simplex.

Demonstratio.



Per 38. lib. 5. tom. 1. ratio B E ad B F est triplicata illius rationis, cujus ratio E K ad F L est duplicata: quare cùm per 35. lib. citati angulus F B E bisectus sit per rectam D B, ratio E G ad G F eadem est cùm ratione E B ad B F, igitur ratio E G ad F G est triplicata ejus, cujus ratio E K ad F L est duplicata. Sed ratio E K ad F L, hoc est B K ad B C, hoc est B C ad B L, hoc est K C ad C L, hoc est E H ad H F, est duplicata rationis D C ad F L: ducatur itaque I M parallela D C, quæ cum sit ordinatim ad axem, erunt D C, I M æquales, igitur ratio E K ad F L, hoc est E H ad H F duplicata est rationis I M ad F L, hoc est E I ad I F. Igitur rationes E G F, E H F, E I F se habent ut ratio triplicata, ratio duplicata & ratio simplex.

PROPOSITIO XIIJ.

Iisdem manentibus: Dico B F ad B E habere triplicatam rationem ejus, cujus A F ad A E est duplicata.

Demonstratio.

Ratio B F ad B E triplicata est ejus rationis, cujus ratio F L ad E K est duplicata: Sed ratio A F ad A E eadem est cum ratione F L ad E K, Patet igitur veritas propositionis.

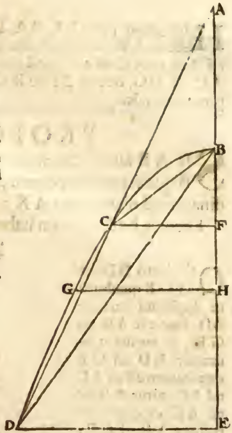
PROPOSITIO. XIV.

Sit parabola B G D ad cujus diametrum B E ordinatim & proportionales ponantur D E, G H, C F, sitque G H lateri recto æqualis, & per puncta D, & C ducta recta occurrat lineæ diametrali in A:

Dico rectangulum A F B ad A E B rectangulum habere rationem, quam habet rectangulum B F C ad B E D rectangulum.

Demon-

Demonstratio.



Rectangulum A F B ad rectangulum A E B [a] habet rationem compositam ex ratione A F ad A E, hoc est C F ad D E (cum triangula C F A, D E A sint similia) & ex ratione B F ad B E. Sed rectangulum B F C ad rectangulum B E D etiam habet rationem compositam ex ratione C F ad D E, & B F ad B E; igitur rectangulum A F B ad A E B rectangulum eandem habet rationem, quam rectangulum B F C ad rectangulum B E D.

a 23. sexti.

PROPOSITIO XV.

Iisdem manentibus: Dico rectangulum A F B ad A E B rectangulum triplicatam habere rationem lineæ A F ad A E.

Demonstratio.

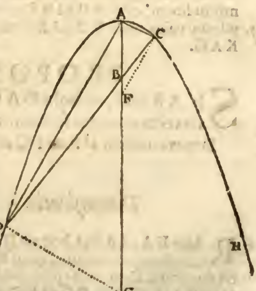
Rectangulum A F B ad A E B habet rationẽ compositam ex ratione B F ad B E, quæ est duplicata rationis F C ad E D; & ex ratione A F ad A E, hoc est F C ad E D; unde patet veritas propositionis.

PROPOSITIO XVI.

Sit A B axis parabolæ D A C lateri recto æqualis, & per B posita sit C D, junctisque A D, A C ducantur D G, C F parallelæ ad C A, A D occurrentes diametro A B in G & F.

Dico C A, C F, D G, D A esse in continua analogia.

Demonstratio.



Cum per constructionem parallelæ sint rectæ A D, C F, erunt [a] anguli B C F, B D A & B F C, B A D æquales, similia igitur sunt triangula C B F, A B D. Eodem modo triangula C B A, D B G ostenduntur similia; Quare C A est ad D G, ut C B ad B D, & ut C B ad B D, hoc est C A ad D G, ita C F ad A D, & permutando C A est ad C F ut D G ad A D. [b] Sed ratio C A ad A D triplicata est ejus rationis, cujus C B ad B D, hoc est C A ad D G est duplicata, hoc est (ut in proœmio tomi hujus explicuimus) ratio A D ad A C dividitur in tres rationes æquales, quarum una bis repetita ęquatur toti rationi D G ad A C. Igitur (cum ratio A D ad A C composita sit ex ratione A D ad D G, & ex ratione D G ad A C, hoc est ex ratione A D ad D G & ex duabus aliis rationibus, quarum ratio A D ad A C est triplicata) ratio D A ad D G, hoc est F C ad A C, est simplex cujus D G ad A C est duplicata, igitur D G, F C, A C proportionales sunt: ut vero F C ad C A sic D A est ad D G, ut prius ostensum est, ergo A D, D G, F C, A C sunt proportionales, & invertendo proportionales sunt C A, C F, D G, D A. Quod fuit demonstrandum.

a 29. primi.

b 65. l. 5. tom. 1.

Corol-

Corollarium.

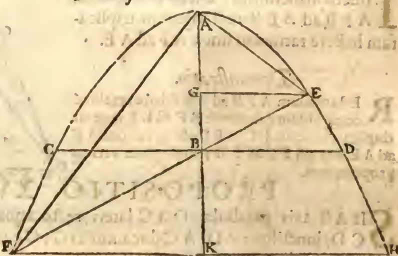
HInc etiam patet B F, B A, B G proportionales esse. Ostensum est enim C F esse ad A D, hoc est ob similitudinem triangulorum C B F, A B D, B F esse ad A B, ut A C ad D G. Sed quia iterum triangula A B C, D B G similia sunt, ut A C ad D G, hoc est B F ad B A, ita B A est ad B G; igitur B F, B A, B G sunt proportionales.

PROPOSITIO XVIJ.

SIt A B latus rectum parabolæ C A D axi A K inserviens, & ducta per B quævis recta occurrat parabolæ in E & F ponanturque E G, F K ordinatim ad diametrum A K:

Dico A F ad A E eam habere rationem, quam A K habet ad A G.

Demonstratio.



QUadratũ B D est ad G E quadratũ in duplicata ratione BD, hoc est A B ad G E, & rursus quadratum B D ad G E quadratum est ut A B ad A G igitur A B est ad A G in duplicata ratione A B ad G E; proportionales itaque sunt A G, G E, B D. Similiter proportionales ostendũtur rectæ B D, K F, A K: Quia igitur [a] proportionales sunt A G, A B, A K erit quoque G E ad B D ut B D ad F K, adeoque rectæ A G, G E, B D, K F, K A proportionales & ratio A K ad A G triplicata ejus rationis, cujus K F ad G E, hoc est ob triangulorum similitudinem, cujus F B ad B E est duplicata. [b] Sed etiam ratio F A ad A E est triplicata cujus ratio F B ad B E est duplicata; æquales itaque sunt rationes F A E, K A G.

a 59. lib. 5. tom. 1.

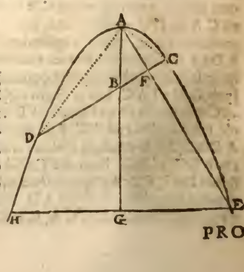
b 65. lib. 5. tom. 1.

PROPOSITIO XVIIJ.

SIt A B axis parabolæ D A C lateri recto æqualis, & ducta per B quævis recta occurrat sectioni in D & C, sitque A F normalis ad D C:

Dico rationem D F ad F C triplicatam esse rationis D B ad B C.

Demonstratio.



RAtio D A ad A C, [a] hoc est D F ad F A, [b] triplicata est rationis, cujus D B ad B C est duplicata. Cum vero [c] proportionales sint D F, F A, F C, ratio D F ad F C est duplicata rationis D F ad F A, igitur ratio D F ad F C est sextuplicata illius rationis, cujus ratio D B ad B C est duplicata, igitur etiam ratio D F ad F C triplicata est rationis D B ad B C. Quod erat demonstrandum.

a Ex 8. sexti.

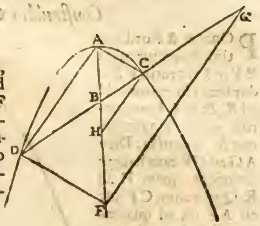
b 65. lib. 5. tom. 1.

c Clavius ad 8. sexti.

PROPOSITIO XIX.

SIt A B axis lateri recto æqualis, & positâ quâvis C B D, ducantur C A, D A & rectæ C A æquidistet D F, insuper rectę D A sit parallela F G occurrens D C in G:

Dico rationem G B ad B C esse quadruplicatam illius rationis, cujus ratio D B ad B C est duplicata.



Demonstratio.

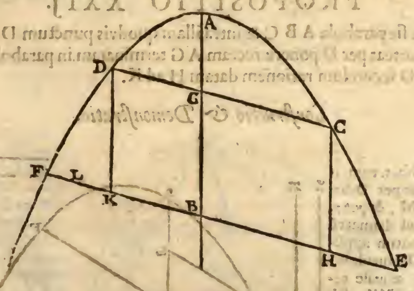
QUoniam rectæ C H, G F parallelę sunt, ut B F ad B H ita est G B ad B C. Sed [a] ratio B F ad B H duplicata est rationis B F ad B A, hoc est ob triangulorum similitudinem B D ad B C, igitur ratio G B ad B C duplicata est rationis D B ad B C, unde ratio G B ad B C quadruplicata est ejus, cujus ratio D B ad B C est duplicata. Quod fuit demonstrandum.

a ex Coroll. 16. hujus.

PROPOSITIO XX.

SInt in parabola E A F positæ duæ parallelæ C D, E F, quæ ab axe secentur in G & B, sitque C G major quam G D, & E F remotior à vertice quam C D.

Dico rationem C G ad G D majorem esse, quam sit ratio E B ad B F.



Demonstratio.

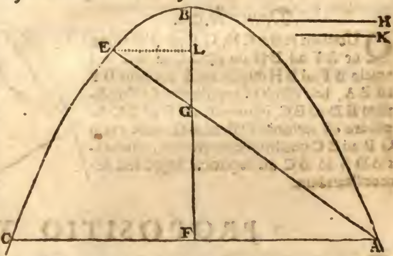
PEr C & D ponantur diametri secantes rectam E F in H & K, [a] erunt E H, K F æquales. Fiat vero ut H B ad B K, ita E H ad K L; cum per constructionem HB, hoc est C G, major sit quam B K, hoc est G D, etiam EH, hoc est KF major erit quam K L: igitur punctum L cadet inter K & F. Cum vero ratio H B ad B K eadem sit cum ratione E H ad K L, erit ratio E B ad B L eadem cum ratione H B ad B K hoc est C G ad G D. Sed ratio E B ad B L major ratione E ad B F, igitur ratio C G D major est ratione E B F.

a 30. lib. 5. tom. 1.

PROPOSITIO XXI.

SIt parabolæ A B C diameter B F: Oporteat ex puncto quodam in sectionis perimetro A ponere rectam A E, quæ secta sit à diametro B F in G secundum datam rationem H ad K.

Constructio & Demonstratio.

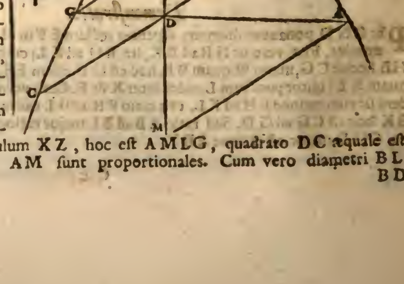


POnatur A F ordinatim & secetur recta B F in L, ut ratio F B L duplicata sit rationis H ad K, & sit L E ordinatim posita, junganturque A, E puncta: Dico A G ad G E eam habere rationem, quam H ad K. Quadratum C F hoc est A F est ad quadratum E L, hoc est quadratum A G ad quadratum E G (cum recta A F sit ad E L ut A C ad G E, ob triangulorum similitudinem) est ut F B ad B L; igitur F B ad B L est in duplicata ratione A G ad G E. Sed etiam F B ad B L est in duplicata ratione H ad K; igitur A G est ad G E ut H ad K. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXII.

DAta sit parabola A B C & intra illam quodvis punctum D: Oporteat per D ponere rectam A G terminatam in parabola, quæ secta sit in D secundum rationem datam H ad K.

Constructio & Demonstratio.



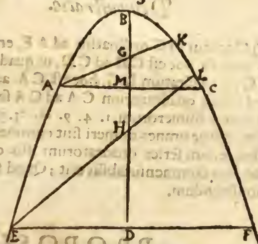
PEr 22. lib. 5. tom. 1. ponatur per D diameter B M, & per 7. ejusdem ad diametrũ B D ordinatim applicetur C D, quadrato C D fiat æquale rectangulum X Z sub ratione H ad K: applicentur X Z ordinatim ad diametrum B M, sintque M A, L G. Denique A D, D G jungantur: dico factum quod petitur. Per constructionem rectangulum X Z, hoc est A M L G, quadrato D C æquale est; igitur L G, D C, A M sunt proportionales. Cum vero diametri B L, B D,

B D, B M sint in duplicata ratione ordinatim positarum L G, D C, A M, erunt B L, B D, B M proportionales, & ratio B D ad B M eadem cum ratione L G ad A M. Sed ª L D est ad D M ut B D ad B M, igitur L D est ad D M, ut L G ad A M. Quia vero per constructionem L G, A M ordinatim applicatæ sunt ad diametrum B M, erunt L G, A M parallelæ, & anguli G L D, A M D æquales: Cum itaque per constructionem puncta L, D, M sint in directum, etiam A, D, G in directum erunt. Ob similitudinem vero triangulorum A D M, G D L erit A D ad D G, ut A M ad G L, hoc est X ad Z, hoc est per constructionem ut H ad K. Posita itaque est per datum punctum D, recta A G terminata in parabolis, & secta in D secundum rationem datam H ad K. Quod erat faciendum. a lib. 2. tom. 1.

PROPOSITIO XXIII.

IN parabola F B E, cujus diameter B D, ponatur ordinatim C A, F E, divisisque rectis B M, B D proportionaliter in G & H, ducantur A G K E H L:

Dico A K, E L proportionaliter sectas esse in G & H.



Demonstratio.

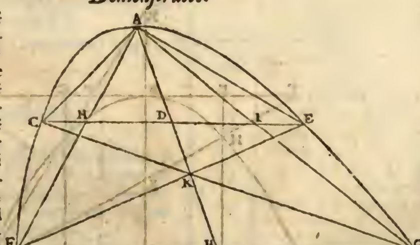
PEr Corollarium prop. 59. lib. 5. tom. 1. ut B G est ad B M, ita K G est ad G A, utque B H ad B D ita L H est ad H E. Sed per constructionem ratio B G ad B M eadem est cum ratione B H ad B D, igitur etiam K G est ad G A ut L H ad H E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

SIt A B diameter præter axem, & parallelæ C E, F G ordinatim positæ, & junctæ sint A C, A E, A G, A F, & E F, C G:

Dico triangula E A F, G A C esse æqualia.

Demonstratio.

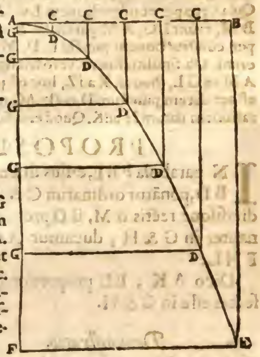


SIcut ª F B ad B G ita est triangulum F A B ad B A G triangulum, utque eadem F B ad B G ita quoque est triangulũ F K B ad B K G triangulum, igitur residuum triangulũ F A K est ad residuum triangulum K A G ut F B ad B G: sed F B æqualis est B G cum F G sit ordinatim applicata, igitur æqualia sunt triangula F A K, K A G. Similiter ostenditur tam triangula C A D, D A E, quam triangula C D K, D K E æqualia esse. Patet itaque triangula F A K, D A E, D K E simul sumpta æqualia esse triangulis K A G, C A D, C D K simul sumptis, hoc est triangulum E A F æquale esse triangulo G A C. Quod fuit demonstrandum. a 1. sexti.

PROPOSITIO XXV.

PArabola A E F habeat A F diametrum, contingentem vero B A, quâ divisâ in partes æquales, ponātur C D parallelæ diametro:

Dico quadrata C D inter se commensurabilia esse.



Demonstratio.

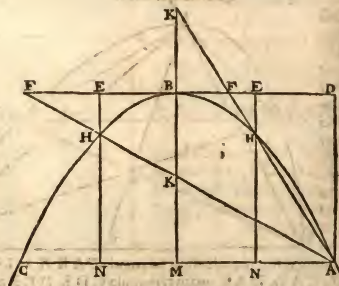
POnantur D G ordinatim ad A F, erit A G ad A G, hoc est C D ad C D, ut quadratum D G ad quadratum D G, hoc est C A ad C A. Sed series quadratorum C A ad C A se habet ut series numerorum 1. 4. 9. 16. 25. 36. &c. Cum igitur omnes numeri sint commensurabiles, etiam series quadratorum illis correspondens commensurabilis erit; Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

PArabolam A B C cujus diameter B M contingat in B recta F D, positâ deinde quâvis secante F A, per A & H ducantur A D, N E diametro B M parallelæ.
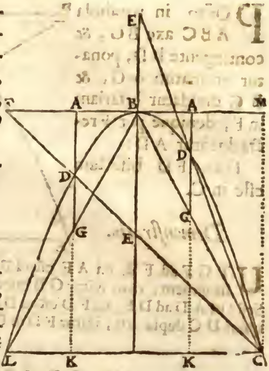
Dico F E, F B, F D esse proportionales.

Demonstratio.



PEr 81. lib. 5. tom. 1. rectæ F H, F K, F A sunt proportionales, igitur cum parallelæ sint rectæ A D, E N, B M, etiam rectæ F E, F B, F D eandem analogiam continuant. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIJ.



PArabolam C B L contingat in B recta F M, cui parallela sit C L, positoque axe B E ducatur secans C D occurrens contingenti in F, sectioni in D, axi in E; per D ponatur diameter A D G, ducanturque C B, B L secantes A D diametrum in G:

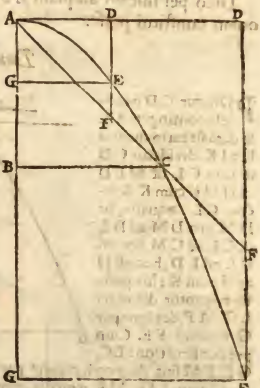
Dico rectam A G rectæ B E æqualem esse.

Demonstratio.

OStensum est [a] rectas F A, F B, F M proportionales esse, igitur etiam A D, B E, M C, hoc est A D, B E, A K proportionales sunt: sed per 67. lib. 5. tom. 1. proportionales sunt A D, A G, A K, ergo B E, & A G æquales sunt. Quod fuit demonstrandum.

a 26 hujus.

PROPOSITIO. XXVIIJ.



SIt A C B parabola, cujus diameter A G, & A B æqualis sit lateri recto, positâque C B ordinatim, per A & C secans agatur: deinde ex tangente D A demittatur D F parallela A G, & secans parabolam in E, & E G ordinatim applicetur ad diametrum A G:

Dico rectam E G æqualem esse rectæ D F.

Demonstratio.

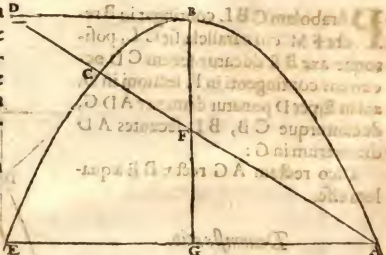
CUm ex hypothesi A B æqualis sit lateri recto, erunt A G, G E, A B hoc est D E, G E, A B proportionales: Sed etiam [a] D E, D F, A B sunt proportionales, igitur mediæ E G, D F æquales sunt.

a 67. lib. 5. tom. 1.

PROPOSITIO XXIX.

POsito in parabola ABC axe BG, & contingente BD, ponatur ordinatim AG, & BG dividatur bifariam in F; denique per F recta ducatur AD:

Dico FD bisectam esse in C.



Demonstratio.

UT GF ad FB, ita AF est ad FD, ob triangulorum AFG, BFD similitudinem, cum igitur GB bisecta sit in F, etiam AD linea in F bisecta est. Sed [a] ut AD ad DF, sic FD est ad DC, igitur cum AD dupla sit FD, etiam FD ipsius DC dupla erit; igitur FD in C bisecta est. Quod erat demonstrandum.

a 81. lib. 5. tom. 1.

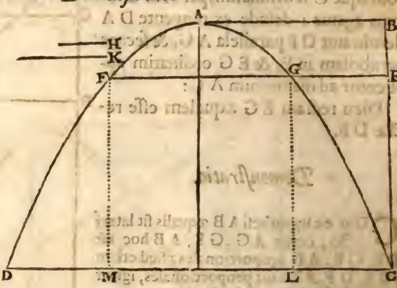
PROPOSITIO XXX.

SIt AB contingens parabolam CAD in vertice A, & diameter posita CB:

Dico per lineam aliquam EF parallelam contingenti, omnem rationem constitui posse.

Demonstratio.

POnatur CD parallela contingēti AB, & data sit ratio quævis H ad K, dividatur CD in L, ut CL sit ad LD ut H ad H cum K, & rectæ CL æqualis sit DM, erit DM ad DL ut CL ad CM, hoc est CL ad LD, hoc est H ad H cum K; his positis erigantur diametri LG, MF, denique per G ducatur FE. Cum per constructionē BC, GL, FM sint diametri, etiam [a] parallelæ erunt: Quia vero CL, DM æquales sunt, etiam LG, MF æquales erunt; adeoque EF, CD, & per consequens EF, BA parallelæ erunt, & ratio EG ad EF eadem cum ratione CL ad CM, hoc est ad H cum K; igitur dividendo ut H ad K ita EG ad GF, unde cum ratio H ad K pro libitu assumpta sit, patet omnem rationem in parabola ad sensum propositionis poni posse.

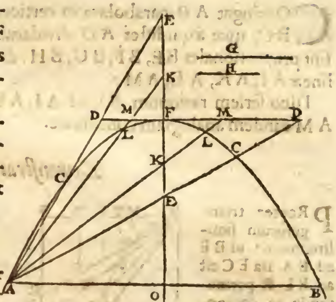


a 19. lib. 5. tom. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

PArabolam A F B, cujus diameter F O, contingat in F recta F D: positâ deinde quâvis secante A D, quæ secet diametrum in E:



Dico omnem rationem mediam inter rationem A D E & æqualitatis, exhiberi posse per rectam ex A ductam, quæ cadat inter D & F.

Demonstratio.

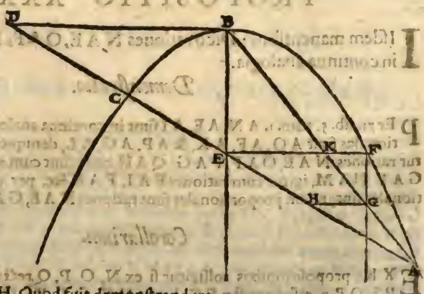
SIt enim data ratio G ad H minor ratione A D E, major vero ratione æqualitatis; ductâ deinde A B ordinatim ad F O diametrum, fiat ut G ad H, ita O F ad F K, & per K ponatur A K M. Dico rationem A M K æqualem esse rationi G ad H. Cum A B, F M sint parallelæ, similia sunt triangula O K A, F K M, igitur ut O K ad K F ita A K est ad K M, & componendo vel dividendo, ut O F ad F K, hoc est ex constructione ut G ad H, sic A M ad M K. Igitur omnis ratio media inter rationem A D E & æqualitatis exhiberi potest per rectam, quæ cadat inter D & F.

PROPOSITIO XXXIJ.

PArabolam A B C cujus axis B E, secet ordinatim posita F E, eique æquidistans sit B D, per E ducta sit A E D occurrens sectioni in C: positâ denique B A, quæ secet ordinatim positam F E in K, & diametrum F G in G, ducatur G H parallela F E:

Dico rationem D C ad D E duplicatam esse rationis D E ad D H.

Demonstratio.



OStensum est propositione 71. lib. 5. tom. 1. B K, B G, B A proportionales esse, igitur D E, D H, D A etiam sunt proportionales, & ratio D E ad D A duplicata est rationis D E ad D H. Sed ratio D E ad D A [a] eadem est cum ratione D C ad D E; ergo ratio D C ad D E duplicata est rationis D E ad D H. Quod fuit demonstrandum.

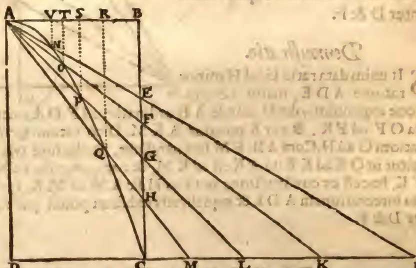
a 81. lib. 5. tom. 1.

PROPOSITIO XXXIIJ.

Contingat A B parabolam in vertice, cujus axis A D; posita deinde B C, quæ æquidistet A D, dividatur B C in punctis E, F, G, H, ut sint proportionales B E, B F, B G, B H: ducantur denique per E, F, G, H, lineæ A I, A K, A L, A M:

Dico seriem rationum A E ad A I, A F ad A K, A G ad A L, A H ad A M eandem analogiam continuare.

Demonstratio.



Propter triangulorum similitudinem [a] ut B E ad E A ita E C est ad E I, & permutando ac componendo ut B E ad B C ita A E ad A I. Similiter ostenditur A F esse ad A K ut B F ad B C, & sic de cæteris A G ad A L ut B G ad B C, utque B H ad B C ita A H ad H M.

a 4. *sexti.*

Quare [b] cum ratio E B C sit ad rationem F B C ut B E ad B F, utque B F ad B G, hoc est B E ad B F, hoc est B G ad B H, hoc est B H ad B C (cum ex constructione B E, B F, B G &c. proportionales sint) ita ratio F B C sit ad rationem G B C, & ita ratio G B C ad H B C rationem, erunt rationes E B C, F B C, G B C, H B C proportionales quibus rationibus cum rationes E A I, F A K, G A L, H A M æquales ostensæ sint: patet rationes E A I, F A K, G A L, H A M eandem analogiam continuare.

b 2. *lib.* 8. *tom.* 2.

PROPOSITIO XXXIV.

Iisdem manentibus: Dico rationes N A E, O A F, P A G, Q A H esse in continua analogia.

Demonstratio.

Per 71. lib. 5. tom. 1. A N, A E, A I sunt in continua analogia: similiter proportionales sunt A O, A F, A K, & A P, A G, A L, denique A Q, A H, A M, igitur rationes N A E, O A F, P A G, Q A H eædē sunt cum rationibus E A I, F A K, G A L, H A M, igitur cum rationes E A I, F A K &c. per præcedentem proportionales sint, etiam proportionales sunt rationes N A E, G A F, P A G, Q A H.

Corollarium.

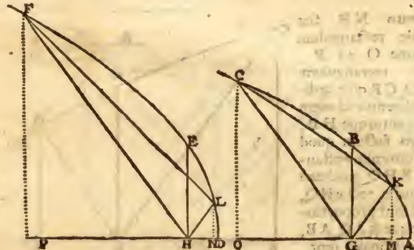
Ex his propositionibus colligitur si ex N, O, P, Q rectæ ducantur N V, O T, P S, Q R parallelæ rectæ B C, lineas N V, O T, P S, Q R, C B proportionales fore.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

HAbeant A B C, D E F parabolæ diversæ, rectas B G, E H æquales, quæ ordinatim ad axes applicatæ æquales angulos C G K, F H L, bisecent, junganturque K C, L F:

Dico K G C, L H F triangula æqualia esse.



Demonstratio.

POsitis ordinatim ad axes rectis K M, C O, L N, F P, quoniam anguli K G B, B G C, L H E, E H F ex constructione æquales sunt, uti etiam anguli A G B, B G O, D H E, E H P si illi ab his auferantur, etiam K G A, C G O, L H D, F H P anguli æquales erunt: igitur [a] rectæ K M, B G, C O, & L N, E H, F D sunt proportionales: igitur rectangulum C O K M æquale est quadrato B G, & F P L N rectangulum æquale quadrato E H, hoc est quadrato B G; ergo æqualia sunt rectangula C O K M, F P L N, unde [b] ut F P ad C O ita K M est ad L N: propter æqualitatem autem angulorum similia sunt triangula K M G, C O G, L N H, F P H, igitur ut F P ad C O ita est F H ad C G, utque K M ad L N hoc est F P ad C O, ita K G ad L H, igitur ut F H ad C G ita K G ad L H, anguli quoque K G C, L H F per constructionem æquales sunt, ergo [c] tota triangula K G C, L H F æqualia sunt.

a 32. & 33. lib. 5. tom. 1.
b 14. sexti.
c 15. sexti.

PROPOSITIO XXXVI.

IIsdem manentibus: Dico rectangula M G O, N H P æqualia esse.

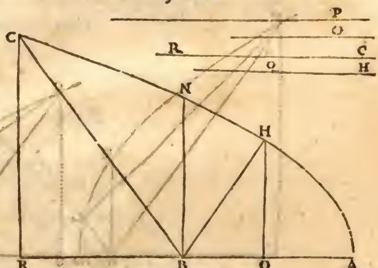
Demonstratio.

PEr constructionem anguli K M G, C O G, L N H, F P H sunt recti, anguli quoque K G M, C G O, L H D, F H P sunt æquales, similia igitur sunt triangula K M G, C G O, L N H, F H P, & per 32. & 33. lib. 5. tom. 1. rectæ K M, B G, hoc est E H, & C O proportionales sunt, uti etiam rectæ L N, E H, F P, unde rectangula K M C O, L N F P quadrato B G, & inter se æqualia sunt. Igitur ut K M ad L N ita F P ad C O; sed ut K M ad L N ita est M G ad N H (ob triangulorum similitudinem) utque F P ad C O, hoc est K M ad L N, hoc est M G ad N H, ita P H ad O G; igitur rectangula M G O, N H P æqualia sunt. Quod fuit demonstrandum

PROPOSITIO XXXVIJ.

SIt A R axis parabolæ A C R, & ordinatim posita N B: Oporteat ponere B H, B C in ratione data O ad P, ut anguli C B R, H B A sint æquales.

Constructio & Demonstratio.



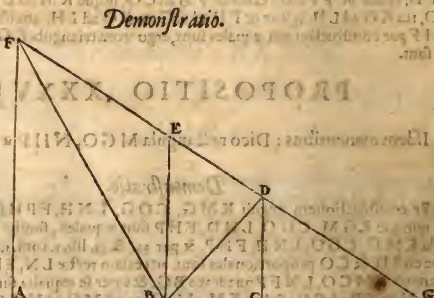
QUadrato N B fiat æquale rectangulum sub ratione O ad P, nimirum rectangulum super H Q, C R quæ ordinatim applicentur ad axem A R, junganturque H B, C B: Dico factum quod petitur. Cum enim rectangulum C R H Q quadrato N B sit æquale, rectæ H Q, N B, C R sunt proportionales, adeoque & A Q, A B, A R proportionales sunt, & [a] anguli H B Q, C B R æquales. Sed etiam per constructionem anguli C R B, H Q B recti sunt, igitur similia sunt triangula H B Q, C B R, utque H Q ad C R, hoc est per constructionem ut O ad P, ita est H B ad C B. Posuimus itaque lineas B H, B C, in ratione data O ad P, facientes angulos æquales cum axe parabolæ: Quod erat propositum.

a 32. *lib.* 5. *tom.* 1.

PROPOSITIO XXXVIIJ.

IN triangulo rectangulo F A G, sint F A, E B, D C proportionales & parallelæ lateri, quod recto angulo adjacet, junganturque F B, D C: Dico angulos D B C, F B A inæquales esse.

Demonstratio.



SInt enim æquales, si fieri possit: cum igitur F A, E B, D C sint parallelæ, erunt [a] etiam C D B, B F A anguli æquales, & tota triangula D B C, F B A similia, igitur ut [b] D C ad F A, ita C B erit ad B A. Quia vero D C, E B, F A sunt proportionales, etiam G C, G B, G A eandem continuant analogiam, & [c] C B est ad B A ut G C ad G B, hoc est ut D C ad E B, igitur C B est ad B A, ut D C ad E B, & etiam C B est ad B A, ut D C ad F A. Quod cum dici non possit, patet angulos D B C, F B A non esse æquales.

a 29. *primi*

b 4. *sexti.*

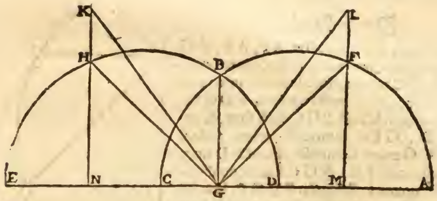
c 1. *lib.* 2. *tom.* 1.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

Circuli A B C, D B E habeant B G ordinatim positam communem, positisque secantibus F G, H G, ut anguli F G A, H G E sint æquales: deinde per F & H normaliter erigantur M L, N K ipsis F G, H G æquales, junganturque K G, L G:

Dico angulos L G F, K G H æquales esse.



Demonstratio.

Per constructionem triangula F M G, H N G sunt similia, cum anguli F G M, H G N, & F M G, H N G ponantur æquales; ergo [a] ut M G ad G N sic F G ad H G, hoc est L M ad K N, & anguli L M G, K N G sunt recti: [b] ergo etiam M L G angulus æqualis est angulo N K G: deinde quia M F G, N H G anguli æquales sunt, erunt quoque anguli L F G, K H G æquales; igitur & residuus angulus L G F reliquo K G H est æqualis. Quod erat demonstrandum.

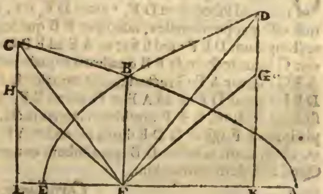
a 4. sexti.
b 6. sexti.

PROPOSITIO XL.

Sint duæ parabolę A B C, E B D, quæ & ordinatim positam B F & axem A E habeant communem, ex puncto F ducantur F D, F C ut anguli C F E, D F A sint æquales, positisque C L, D K ordinatim ad axem, ipsis D K & C L æquales ducantur ex F occurrentes rectis D K, C L in G & H.

Dico angulos D F G, C F H æquales esse.

Demonstratio.

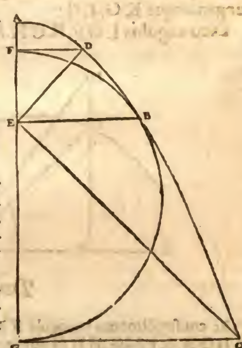


Cum anguli D K F, C L F recti sint, anguli quoque D F K, C F L æquales, erunt tota triangula D F K, C F L similia; igitur ut K F ad L F ita D K ad C L, hoc est G F ad H F, ergo etiam triangula G F K, H F L similia sunt, & anguli K G F, L H F æquales, unde angulus D G F angulo C H F æqualis est: cum itaque anguli quoque K D F, L C F sint æquales, etiam reliqui anguli D F G, C F H æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

ESto A G axis parabolæ A B C, assumptaque axeos parte A E, quæ major sit dimidio lateris recti: ducantur ex E lineæ E D, E C facientes angulos A E D, G E C semirectos: dein E B ordinatim positâ ducantur ex D & C ad axem normales F D, G C:

Dico puncta F B G esse ad semicirculum, cujus diameter est F G.



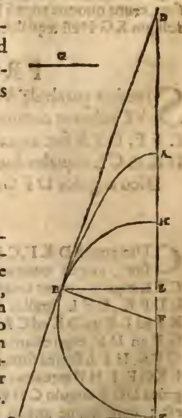
Demonstratio.

PEr 32. lib. 5. tom. 1. rectæ A F, A E, A G continuę sunt proportionales, quare etiam F D, E B, G C proportionales sunt, unde E B quadrato æquale est rectangulum F D G C: quia vero anguli E F D, E G C recti sunt, & anguli F E D, G E C semirecti, erunt reliqui F D E, E C G etiam semirecti, quare F D linea æqualis est lineæ F E, & G C linea ęqualis lineæ G E: quare rectangulo F D G C, hoc est quadrato E B æquale est rectangulum F E G, unde F E, E B, E G continuæ sunt proportionales, patet igitur puncta F, B. G esse ad semicirculum, cujus diameter est F G. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLII.

ESto A E pars axeos parabolæ A B C, major dimidio lateris recti, positâque E B ordinatim ad axem, sumatur E F pars axeos æqualis dimidio lateris recti, junctisque F, B ducatur B D normalis ad F B:

Dico B D lineam contingere parabolam in B.



Demonstratio.

QUoniam angulus D B F rectus ponitur, & B E normalis ad subtensam D F, ª patet D E, E B, E F continuè esse proportionales, adeoque E B quadrato æquale rectangulum D E F: sed si fiat ut A E ad E B ita E B ad G, erit G latus rectum, & E B quadrato æquale rectangulum A E G: igitur A E G rectangulum æquale est rectangulo D E F: igitur D E est ad A E ut G est ad E F: Sed G cum sit latus rectum, & E F dimidium lateris recti, erit G dupla ipsius E F, igitur & D E dupla est rectæ A E, quare per 17. lib. 5. tom. 1. recta D B parabolam contingit in B. Quod erat demonstrandum.

ª ex 8. sexti

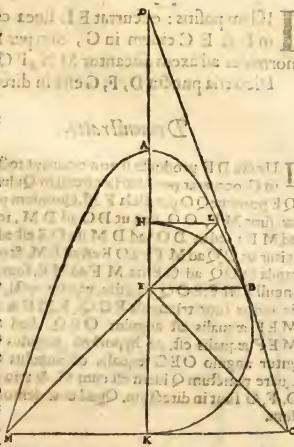
Corollaria.

HInc sequitur, cum F B semidiameter sit ad angulos rectos lineæ D B, B D lineam circulum tangere in B.

2. Circulum H B K contingere intus parabolam in B.

PROPOSITIO XLIIJ.

Esto ABC eadem parabola quæ prius, quam in B contingat linea BD; item ſemicirculus idem HBK, quem eadem BD contingat in B: denique ex H & K ordinatim ad axem ponantur lineæ HL, KC.



Dico HL rectam æquari rectæ HE, & EK lineam æquari lineæ KC.

Demonſtratio.

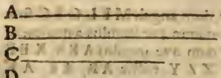
QUoniam BD linea contingit circulum in B, [a] erit DK linea in H & E ſecta ſecundum extremam & mediam rationem proportionalem. Quia vero DE in A biſecta eſt (cum BD parabolam quoque contingat in B) erit HAK rectangulum [b] æquale quadrato AE; quare AH, AE, AK continuæ ſunt proportionales, uti & HL, EB, KC, & EB quadrato æquale eſt rectangulum HLKC: ſed quia EB ad ſemicirculi diametrum HK eſt normalis, [c] etiam EB quadrato æquale eſt rectangulum HEK, igitur HEK rectangulum æquale eſt rectangulo HLKC; igitur [d] ut HL ad HE ita EK eſt ad KC. Quia vero anguli EHL, EKC ſunt recti adeoque æquales, ſi ducantur LE, CE erit [e] angulus HLE æqualis angulo KEC, igitur & reliquus angulus HLE æqualis reliquo ECK, & triangula HLE, KCE ſunt ſimilia; igitur [f] LH eſt ad KC ut HE ad EK, & permutando LH ad HE ut KC ad EK. Sed ut LH ad HE ita oſtenſum eſt EK eſſe ad KC, igitur ut EK ad KC ita eſt KC ad EK: æquales ergo ſunt EK, KC: & quia eſt ut HL ad HE ita EK ad KC, vel KC ad EK, erunt etiam HL, HE æquales. Quod fuit demonſtrandum.

a 2. *lib.* 5. *tom.* 1.
b 4. *eiuſdem.*
c 35. *tertij.*
d 16. *ſexti.*
e 32. *lib.* 5. *tom.* 1.
f 4. *ſexti.*

Corollarium. 1.

HInc ſequitur angulos HEL, KEC eſſe ſemirectos. Cum enim HL, HE lineæ ſint æquales, uti & EK, KC: patet angulos HEL, HLE æquales eſſe, uti et KEC, KCE: quia vero, anguli EHL, EKC ſunt recti, manifeſtum eſt reliquos angulos eſſe ſemirectos.

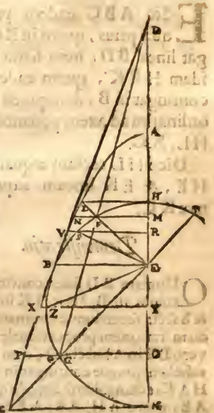
Corollarium. 2.



COlligitur deinde ex hac propoſitione, ſi ſint quatuor lineæ A, B, C, D ita ut rectangulum AD æquale ſit rectangulo BC, & rectangulum AC ſit æquale rectangulo BD, tam rectas A & B, quam C & D æquales eſſe; & contra. Quoniam enim AD rectangulum æquale ponitur rectangulo BC, igitur ut A ad B ita C eſt ad D: & quia AC rectangulum æquale ponitur BD rectangulo, ut A ad B, ita eſt D ad C. Quare cum ſit ut A ad B ita C ad D, utque A ad B ita D ad C, erit C ad D ut D ad C: unde C & D æquales ſunt ac proinde A & B.

PROPOSITIO XLIV.

Iisdem positis: occurrat E L linea circulo in F, & E C eidem in G, tum per F & G normales ad axem ducantur M N, P O: Dico tria puncta D, F, G esse in directum.



Demonstratio.

Iuncta D F producta si non occurrat rectæ O P in G, occurrat peripheriæ circuli in Q: ductâque Q E ponatur Q O parallela F M. Quoniam parallelæ sunt M F, O Q, erit ut D O ad D M, ita O Q
a 10. lib. 3. ad M F: sed ut D O [a] ad D M ita O E est ad E M,
1. igitur ut O Q ad M F ita O E est ad E M, & permu-
b 6. sexti. tanda ut O Q ad O E ita M F ad M E; sunt autem anguli E M F, E O Q æquales, utpote recti, [b] similia igitur sunt triangula E O Q, E M F & angulo M E F æqualis est angulus O E Q. Sed angulo M E F æqualis est, ex hypothesi, angulus O E G; igitur angulo O E G æqualis est angulus O E Q; Quare punctum Q idem est cum G, & tria puncta D, F, G sunt in directum. Quod erat demonstrandum.

PROPOSTIO XLV.

Iisdem manentibus: Dico rectas A M, A E, A O esse in continua analogia.

Demonstratio.

Ut est O G ad M F ita D O est ad D M, utque O G ad M F, ita quoque ob triangulorum similitudinem O E est ad E M, igitur ut D O ad D M ita O E ad E M: est insuper E D linea in A bisecta, quia B D contingit ex constructione parabolam in B, quare per 4. lib. 1. tom. 1. tres lineæ A M, A E, A O in continua sunt analogia.

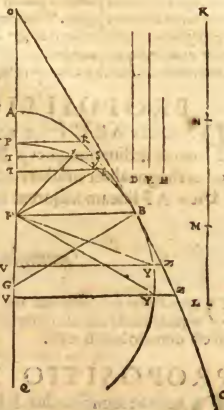
Corollarium.

Ultima hæc assertiò non solum admitti postulat, dum anguli M E L, O E G sunt semirecti. Sed quoties lineæ ex E eductæ faciunt cum axe angulos æquales; ut si E S, E Z, quæ circulo occurrant in S & Z faciant cum axe angulos A E S, K E Z æquales, & per S & Z normales ducantur R S V, X Z Y, rectæ A R, A E, A K erunt proportionales. Demonstratio enim universalis est.

PROPOSITIO XLVJ.

DAtum circulum ex data parabola deſcribere.

Conſtructio & Demonſtratio.



LIbro quem de parabola conſcripſimus, docuimus praxim deſcribendi parabolam ex dato circulo, modo proponimus ex data parabola datũ circulũ deſcribere, & contra ex dato circulo datam parabolã. Quia eâdem parabolâ manente infiniti circuli proponi poſſunt, hinc tota hujus problematis difficultas in eo ſita eſt, ut radiũ dati circuli ſuo loco conſtituamus, centrumque in axi exhibeamus, quo circulus, intervallo radii dati deſcriptus, parabolam contingat in puncto aliquo, à quo, demiſſa ordinatim ad axem ſignet punctum, à quo omnes lineæ deſumi debeant, quę circulum ex data parabola deſcribant.

Sit itaque parabola data A B C, cujus axis A F, & latus rectum ſit æquale rectæ D, cujus dimidia ſit H, radius vero circuli, qui deſcribi poſtulatur, ſit æqualis rectæ E. Oportet itaque praxim exponere circuli per parabolam deſcribendi, cujus radius ſit æqualis rectę E.

Inveniatur primò linea K L, quæ ſit tertia proportionalis ad duas lineas datas, quæ ſunt dimidium lateris recti, quod eſt H, & linea E, quæ eſt radius circuli dati: deinde ex ipſa K L ſumatur recta L M æqualis dimidio lateris recti, ſive æqualis H, diviſaque M K bifariam in N, fiat rectæ N M æqualis A F in axe parabolæ, cui adjiciatur æqualis A O: rectę vero M L fiat æqualis F G: denique ponatur F B ordinatim ad axem, junganturque G B: Dico circulum centro G & intervallo G B, deſcriptum eſſe illum qui quæritur.

Quoniam F A eſt æqualis A O & F B ordinatim ad axem conſtituta, erit recta B O [a] contingens parabolam in B: quia vero F G ipſi H ſive dimidio lateris recti æqualis eſt, [b] erit G B normalis ad B O, quare [c] proportionales ſunt rectæ O G, G B, G F & rectangulum O G F, hoc eſt per conſtructionem K L M æquale quadrato G B: ſed rectangulum K L M per conſtructionem æquale eſt quadrato datæ rectæ E, igitur quadratũ E ęquale eſt quadrato G B & G B linea æqualis dato diametro E. Ulterius ductâ P R quæ circulũ contingat in P, ducantur quotcumque parallelæ ipſi R P occurrentes parabolæ in S & circulo in X; junctiſque F X ducantur totidem F Y, facientes cum F Q axe angulos æquales angulis P F X, & per Y, Y, ponantur ordinatim Z V: Quoniam igitur recta B O contingit parabolam in B, & B F ordinatim ad axem poſita eſt, inſuper F G recta æqualis eſt dimidio lateris recti, etiam O B continget circulum in B, cum [d] G B ſemidiameter ſit ad angulos rectos lineę O B. Quia vero angulis X F P æquales ponuntur anguli Y F Q, [e] erunt rectis X F æquales rectæ S T, & lineis F Y æquales lineæ V Z: unde cum puncta X B Y ſint ad circulum & puncta S B Z ad parabolam, patet hâc methodo rectè circulum P B Q radio E à parabola A B C datâ deſcriptum eſſe. Quod petebatur.

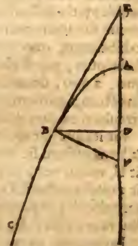
a 42 hujus
b 115 lib. 5. tom. 1.
c ex 8 ſexti
d 115 lib. 5. tom. 1.
e 134 lib. 5. tom. 1.

Scholion.

Scholion.

Mirabitur fortè non nemo cur pro determinatione usi fuerimus aliquâ rectâ, quæ major existeret dimidio lateris recti parabolæ, pro radio circuli inveniendo, qui à parabola produci posset per constructionem, qua præsenti propositione usi sumus. Verum illa determinatio prorsus necessaria est; si enim assumatur aliquod segmentum axeos parabolæ à puncto verticis, quod vel ipsi dimidio lateris recti æquale sit, vel eo minus, tunc ex illis punctis intervallo verticis assumptæ lineæ nimis erunt breves, quam ut illarum intervallis circuli describi possint, qui parabolam contingant in duobus punctis æqualiter ab axe semotis, quod absolutè necessarium est, ut ex parabolis circuli declineari possint. Plura circa hanc materiam reperies libro quem de parabola tom. 1. conscripsimus, à propositione 126. & deinceps. Omne vero augmentum additum dimidio lateris recti, exhibet lineam quandam, quæ sublata ab axe ostendet termino suo punctum, nempe centrum circuli à parabola producendi, qui parabolam hinc inde in duobus punctis contingat.

PROPOSITIO XLVIJ.



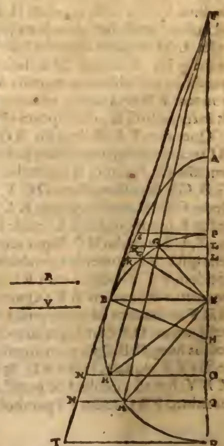
Parabolæ A B C cujus vertex A, & axis A D ponatur ordinatim quævis B D, & contingens B E cui orthogonaliter insistat recta B F:

Dico A F lineam majorem esse lateris recti dimidio.

Demonstratio.

Ostendimus propositione 114. lib. 5. tom. 1. rectam D F æqualem esse dimidio lateris recti, igitur rectâ A F major est dimidio lateris recti.

PROPOSITIO XLVIIJ.



Datus sit semicirculus P B D cujus diameter P D, data insuper sit linea R:

Oporteat ex dato semicirculo P B D semiparabolam describere, quæ partem axeos habeat P D diametrum semicirculi, & latus rectum datam lineam R.

Constructio & Demonstratio.

Esto centrum semicirculi P B D punctum M, sumaturque in diametro P D pars M E, æqualis dimidio lateris recti R, ductâque E B normali ad P D, ponatur B F contingens circulum in B, occurrens diametro P D in F: denique divisâ F E bifariam in A, ducantur quotvis E G, E H hâc lege, ut anguli P E G sint æquales angulis D E H, & per puncta G & H ponantur normales ad P D, rectæ L K ipsis E G æquales & rectæ N O æquales rectis E H. Puncta K, B, N esse ad parabolam patet ex prop. 303. lib. 5. tom. 1. esse autem ad parabolam quæsitam, hoc est cujus latus rectum sit R, sic demonstro. Quia F B contingit circulum in B, & B M ejusdem circuli est radius, erit [a] angulus F B M rectus; & quia B E normalis est ad F M, erit [b] F E M rectangulum

a 18. quarti.
b ex 8. & 17. sexti.

æquale

æquale quadrato E B. Quia vero F E bisecta est in A, si fiat ut A E ad E B ita E B ad V, erit V latus rectum parabolæ A B C, & rectangulum A E V æquale quadrato E B, hoc est rectangulo F E M; [c] igitur ut A E ad F E ita E M ad V: sed A E dimidium est ipsius F E, igitur & E M dimidium est ipsius V. Est autem per constructionem E M dimidium ipsius R, igitur R & V sunt æquales, & A B C parabolæ latus rectum est data linea R. Quod demonstrandum supererat. c 16. sexti.

Corollarium 1.

HInc patet 1. si ex P & D ponantur ordinatim rectæ P S, D T occurrentes parabolæ in S & T, rectam P S æquari rectæ P E, & rectam E D æquari rectæ D T. Cum enim vi constructionis, secantibus E S, E H æquales sint ordinatim positæ L K, O N, erunt E P, E D, partibus diametri, æquales contingentes P S, D T.

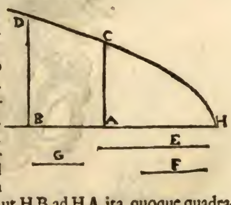
Corollarium 2.

PAtet 2. parabolas quæ circulos gignunt, ab iisdem circulis produci: nam dato circulo P B D, si rectas E G, E H, facientes cum diametro angulos æquales, transferas in normales L K, O N. oritur parabola A K B N. Si vero datâ parabolâ A B N, ordinatim positas L K, O N transferas in rectas E G, E H producitur circulus P B D.

PROPOSITIO XLIX.

SInt ad rectam A B normaliter erectæ duæ A C, B D inæquales.
Oporteat assignare parabolam, quæ transeat per C & D, cujus axeos pars sit recta A B.

Constructio & Demonstratio.

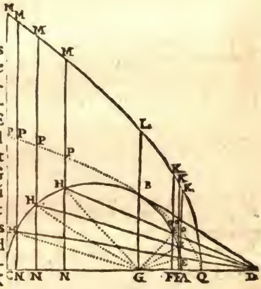


FIat ut quadratum D B ad quadratum C A, ita linea E ad lineam F: sit autem G differentia linearum E, F: fiat deinde ut recta G ad rectam B A, ita linea E ad lineam B H: Dico H esse verticem parabolæ requisitæ. Quoniam est ut G ad B A ita E ad B H, erit permutando ut G ad E, ita B A ad B H, & invertendo, ut E, hoc est F cum G, ad G ita B H ad B A, & dividendo, invertendo & iterum componendo ut G cum F, hoc est E, ad F ita B H ad A H. Sed ut E ad F ita per constructionem quadratum D B est ad quadratum A C; igitur ut H B ad H A ita quoque quadratum D B ad quadratum A C, igitur H vertex est parabolæ quæsitæ, & A B pars axeos.

PROPOSITIO L.

CIrculum A B C contingat D B in B, & ponantur D E H, deinde D C dividatur in G ut sit D A ad A G sicut D C ad C G, & per puncta E & H sint F E K, N H M ordinatim positæ rectis D E, D H æquales: Dico puncta K, M fore ad eandem parabolam.

Demonstratio.



DUctis G E, G H fiant rectis E G æquales F E O, rectis quoque G H æquales rectæ N H P: ostensum est [a] puncta O P esse ad parabolam, cujus vertex est punctum quod bisecat D G in Q: Est autē [b] ut D B ad B G, vel D E ad E G ita D A ad A G: & similiter ut D A ad A G ita D H ad H G. Igitur D E est ad E G ut D H ad H G, & permutādo D E ad D H ut E G ad H G, hoc est F K ad N M ut F O ad N P, cū ex constructione rectis D E, D H æquales sint rectæ F K, N M, & rectis E G, G H æquales F O, N P. Quia igitur puncta O & P sunt ad parabolam, rectæ F O sunt ad N P in subduplicata ratione Q F ad Q N, igitur etiam F K ad N M sunt in subduplicata ratione Q F ad Q N; adeoque quadrata F K ad N M quadrata, ut recta Q A ad Q C, vel Q F ad Q N; unde puncta K, M sunt ad parabolam, cujus vertex est punctum Q.

a 301. lib. 5. tom. 1.

b 35. lib. 3. tom. 1.

PARA-

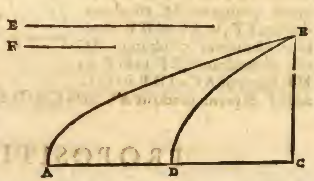
PARABOLÆ
PARS SECUNDA
De Parabolis sese intersecantibus.

PROPOSITIO LI.

INtersecent sese parabolæ duæ A B C, D B C ad eundem axem constitutæ, in puncto B, ex quo ordinatim ad axem ducatur linea B C; sit autem E latus rectum parabolæ D B C, & F latus rectum parabolæ A B C.

Dico rationem axium A C ad D C, & laterum rectorum reciprocam esse, sive A C esse ad D C ut E ad F.

Demonstratio.

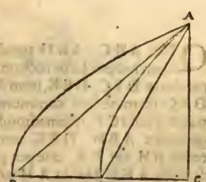


QUoniam E est latus rectum parabolæ D B C, & F latus rectum parabolæ A B C, linea vero B C ordinatim posita, utrique parabolæ est communis, quadrato B C æquale est tam rectangulum A C F quam rectangulum D C E, æqualia igitur sunt inter se rectangula A C F, D C E. [a] Quare A C est ad D C ut E ad F. Quod erat demonstrandum. a 16. sexti.

PROPOSITIO LII.

INtersecent sese parabolæ A B C, A D C ad eundem axem constitutæ in puncto A, ex quo demissa sit ordinatim ad axem, recta A C: Dico A B C parabolam esse ad parabolam A D C, ut B C ad D C.

Demonstratio.



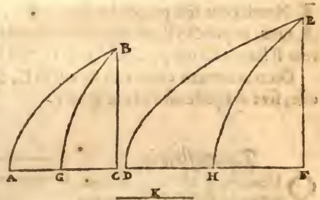
IUngantur A B, A D: per Archimedem & prop. 240. lib. 5. tom. 1. parabola A B C est ad parabolam A D C, ut A B C triangulum est ad triangulum A D C. Sed A B C triangulum est ad triangulum A D C ut [a] B C ad D C; igitur ut B C ad D C ita A B C parabola est ad parabolam A D C. Quod erat demonstrandum. a 1. sexti.

PROPOSITIO LIIJ.

HAbeant A B C, G B C parabolæ ad eundem axem constitutæ communem ordinatim positam B C, uti & parabolæ D E F, H E F communem E F: insuper A B C, D E F parabolæ commune habeant latus rectum, quemadmodum & parabolę G B C, H E F.

Dico A C esse ad G C, sicut D F est ad H F.

Demonstratio.



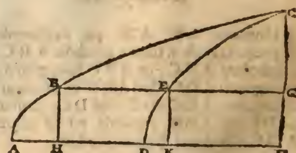
QUoniam A B C, D E F parabolæ commune habent latus rectum K, & B C, E F lineæ ordinatim positæ sunt ad axes AC, DF: igitur rectangulo A C K æquale ad quadratum B C, & D F K rectangulo æquale quadratum E F, igitur quadratum B C est ad quadratum E F, ut A C ad D F. Similiter ostendetur quadratum B C esse ad quadratum E F, ut G C ad H F, igitur ut A C ad D F, ita G C ad H F, & permutando ut A C ad G C ita D F ad H F. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LIV.

INtersecent sese in C parabolæ duæ A B C, D E C: demissâque ex C normali C F ad communem axem A F, ducatur quævis G B parallela axi A F, occurrens sectionibus in E & B, & rectæ C F in G, ponanturque E K, B H, normales ad axem A F:

Dico A B H segmentum esse ad segmentum D E K, ut A B C parabola est ad parabolam D E C.

Demonstratio.



QUia A B C, A B H parabolæ, idem habent latus rectum, uti & parabolæ D E C, D E K, item A B C, D E C terminentur communi ordinatim positâ C F; quemadmodum & parabolæ A B H, D E K communi rectâ B H vel E K, erit per præcedentem A F ad D F ut A H ad D K. Sed [a] A F est ad D F ut A B C parabola ad parabolam D E C, utque [b] A H ad D K ita parabola A B H ad D E K parabolam: igitur A B H segmentum est ad segmentum D E K, ut A B C parabola ad parabolam D E C. Quod &c.

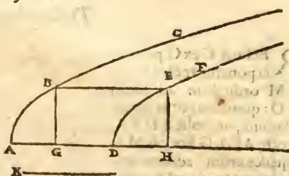
[a] 52. hujus.
[b] per eandem.

PROPOSITIO LV.

Sint A B C, D E F parabolæ duæ parallelæ. assumptoque in peripheria A B C quovis puncto B, ducatur B E parallela axi A D occurrens parabolæ D E F in E.

Dico lineas B E, A D æquales esse.

Demonstratio.



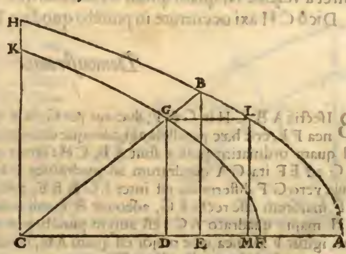
Quoniam hæc assertio in initio demonstrationis prop. 333. lib. 5. tom. 1. assumitur, quamvis ante demonstrata non fuit, juvat eam hîc paucis ratam facere. Ponantur igitur B G, E H perpendiculares ad axem; & sit K latus rectum parabolę A B C. Cum itaque parabolæ A B C, D E F sint parallelæ adeoque & æquales, erit K latus rectum parabolæ A B C, commune parabolæ D E F. Quia vero B G, E H normales sunt ad axem, & B E, G H parallelæ, erunt tam B G, E H quam B E, G H æquales inter se, adeoque & quadrata B G, E H inter se ęqualia: est autem B G quadrato ęquale rectangulum G A K, & quadrato E H æquale rectangulum D H K, æqualia igitur sunt rectangula G A K, H D K: quare & lineæ H D, G A inter se sunt æquales: additâ igitur communi G D, manet A D æqualis G H, hoc est lineæ B E. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVI.

Lineis E C, D C auctaria E A, D F adjuncta sint, quę habeant rationem duplicatam E C ad D C, & rectas ex D & E normaliter eductas, secet altera quędam ex C ducta in G & B: denique per A, B, F, G, parabolę describantur, habentes communem axem A C.

Dico A B, F G parabolas parallelas esse.

Demonstratio.



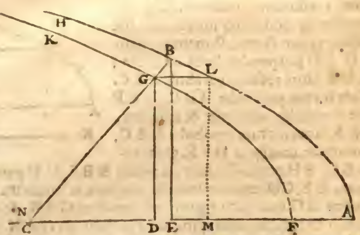
Ponatur G L æquidistans A C, & ex L ordinatim demittatur L M, erit L M æqualis G D, & ratio B E ad L M eadem cum ratione B E ad G D: sed ratio A E ad A M duplicata est rationis B E ad L M, hoc est B E ad G D, & ex constructione etiam ratio A E ad F D duplicata est rationis B E ad G D, igitur ratio A E ad A M eadem est cum ratione A E ad F D, & rectæ F D, A M ęquales sunt: Quare si auferatur commune F M, vel, si commune non sit, utrique addatur, etiam A F & M D, hoc est L G æquales erunt, igitur per 333, lib. 5. tom. 1. parallelæ sunt parabolæ A B, F G.

PROPOSITIO LVIJ.

SInt duę parabolę parallelę A H, F K, & aſſumpta quęvis communis axeos pars A C, dividatur in E & D ut ratio A E ad F D duplicata ſit rationis E C ad D C, ex E & D ponantur ordinatim E B, D G:

Dico puncta B, G, C eſſe in directum.

Demonſtratio.



REctæ A C ex G parallela ponatur recta G L, & L M ordinatim ad axem A C: quoniam igitur parallelæ ſunt parabolæ A H, F K, [a] rectę A F, L G hoc eſt M D æquales erunt: addatur itaque commune, vel ſi commune non ſit dematur F M, erunt A M, F D æquales, & A E ad A M ut A E ad F D. Sed A E ad A M duplicata eſt rationis E B ad L M hoc eſt D G, igitur & ratio A E ad F D duplicata eſt rationis E B ad D G: ſed etiam ratio A E ad F D, ex ſuppoſitione, duplicata eſt rationis E C ad D C, æquales itaque ſunt rationes E B ad D G & E C ad D C: Ducatur itaque per B & G recta B G N, erit E N ad D N ut B E ad D G, hoc eſt E C ad D C. Patet itaque punctum C idem eſſe cum puncto N, adeoque puncta B, G, C in directum eſſe. Quod fuit demonſtrandum.

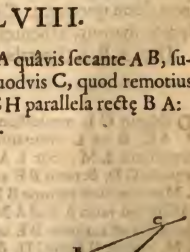
a 55. hujus.

PROPOSITIO LVIII.

ESto A D axis parabolę A B C, ductâque ex A quâvis ſecante A B, ſumatur in perimetro parabolæ punctum quodvis C, quod remotius diſtet à vertice A, quam ipſum B, ducaturque C H parallela rectę B A:

Dico C H axi occurrere in puncto quodam D.

Demonſtratio.



BIſectis A B, C H in G & F, ducatur per G, & F linea F E, erit hæc parallela axi, adeoque diameter, ad quam ordinatim poſitæ ſunt A B, C H: igitur ut E G ad E F ita G A quadratum ad quadratum F H. Quia vero G F differentia eſt inter E G & E F, patet E F majorem eſſe rectâ E G, adeoque & quadratum F H majus quadrato A G: eſt autem punctum A in axe, igitur F H linea, quæ major eſt quam A G, neceſſario axem ſecat in puncto aliquo D.

Hæc aſſertio vera eſt licet A D *non ſit axis, ſed diameter alia quæcunque ut patet demonſtrationem applicanti.*

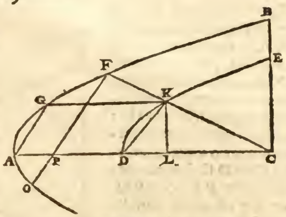
PRO-

PROPOSITIO LIX.

SInt A B C, D E C duę parabolę parallelę : ſumptoque in communi axe puncto quovis C, ducatur quęvis C F occurrens parabolis in K & F.

Dico rationem F C ad K C minorem eſſe ratione A C ad D C.

Demonſtratio.



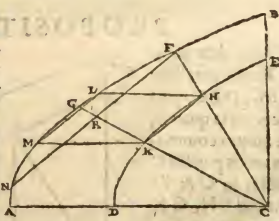
DUctâ K G parallelâ axi AD, jungantur A G, K D; rectæ autem A G parallela ducatur F O. Quoniam G K, A D ex hypoteſi ſunt parallelæ, uti & parabolæ A B C, D E C, [a] erunt G K, A D rectæ æquales : igitur & A G, D K æquales ſunt & parallelę: eſt autem F O parallela ipſi A G, igitur & F O parallela eſt ipſi D K. Rurſum quia G K parallela axi ſecat F C concurrentem cum axe, in K, patet G punctum vicinius eſſe vertici quam ſit ipſum F: quare per præcedentem F O ſecat axem in puncto quodam P, ſito inter A & D: igitur ratio P C ad D C, hoc eſt F C ad K C, minor eſt ratione A C ad DC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LX.

SInt A B C, D E C parabolæ duæ parallelæ: & ex puncto quovis C in axe aſſumpto, ducantur duæ rectæ C F, C G occurrentes parabolis in H, K, F, G, & F C ſit remotior ab axe quam ſit ipſa C G.

Dico rationem G C, ad K C majorem eſſe quam ſit ratio F C ad H C, vel quam ratio B C ad E C.

Demonſtratio.



DUctis H L, K M parallelis axi A D, jungantur H K, L M, [a] patet tam rectas L H, M K quam L M, H K inter ſe æquales eſſe & parallelas : ducatur deinde F N parallela rectæ L M. Quoniam igitur punctum F remotius eſt à vertice diametri M K quam ſit ipſum L, & L M, F N parallelæ ſunt, [b] recta F N ſecabit diametrum M K: Quia vero C G linea ſecat diametrum MK in K, adeoque punctum G cadit inter M & F, manifeſtum eſt G C ſecari in quodam puncto R à recta F N : inſuper quia L M, H K parallelæ ſunt, & F N facta eſt parallela ipſi L M, erit & F N parallela rectæ H K. Quare [c] ut R C ad K C ita F C ad H C, ſed ratio R C ad K C minor eſt ratione G C ad K C, igitur & ratio F C ad H C minor eſt ratione G C ad K C. Simili diſcurſu oſtendetur ratio G C ad K C major ratione B C ad E C; imo & ipſa ratio F C ad H C major ratione B C ad E C.

a ex 55. hujus.

b 58. hujus.

c 1. ſexti.

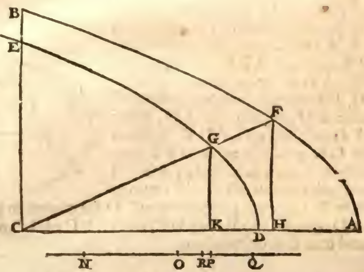
PRO-

PROPOSITIO LXJ.

DAtis duabus parabolis parallelis A B C, D E C, ex puncto quodam axis, communis erigatur normalis C B:

Dico ommem rationem minorem ratione A C ad D C, majorem vero ratione B C ad E C, exhiberi posse per rectam ex C eductam, & parabolis occurrentem in G & F, quæ cadat inter B C & A C.

Demonstratio.



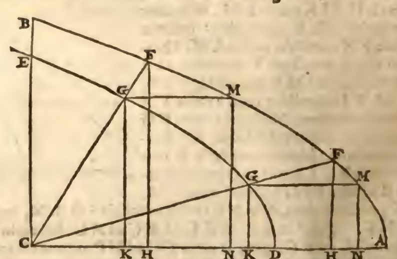
DAta sit ratio P N ad O N minor ratione A C ad D C, & major ratione B C ad E C, & [a] rectis P N O N auctaria addantur, quæ habeant rationem duplicatam rationis P N ad O N: sit autem compositarum linearum ratio æqualis rationi A C ad D C, hoc est, addatur lineæ P N recta P Q, quæ ad O R, adjunctam lineæ N O, duplicatam quidem rationem habeat P N ad O N, ita tamen ut ratio Q N ad R N æqualis sit rationi, quam habet A C ad D C. Deinde recta A C dividatur in punctis H & K, ut divisa est recta Q N in P & O: Quoniam igitur ex constructione, A C est ad D C ut Q N ad R N, & H C ad K C ut P N ad O N; erit quoque A H ad D K ut Q P ad R O, adeoque rectis H C, K C addita sunt auctaria A H, D K in duplicata ratione P N ad O N, hoc est H C ad K C; erectis igitur H F, K G, quæ æquidistent C B, [b] erunt puncta F, G, C in directum: ducatur itaque C F, erit [c] C F ad C G ut C H ad C K, hoc est N P ad N O. Cum igitur ratio N P ad N O, media inter rationes C A ad C D & C B ad C E, pro libitu assumpta sit: patet omnem rationem minorem ratione A C ad D C, majorem vero ratione B C ad E C per rectam ex C eductam, ad sensum propositionis exhiberi posse.

a 18. *lib.* 1. *num.* 10. *tom.* 1.

b 57. *hujus*

c 2. *sexti.*

PROPOSITIO LXIJ.



SInt duæ parabolæ parallelæ ABC, D E C, quas secet recta quævis, ex aliquo communis axeos puncto C ducta, in G & F: sintque F H, G K ordinatim positæ ad axem.

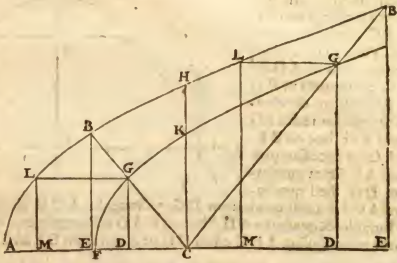
Dico rectangulum A H C ad D K C rectangulum habere triplicatam rationem F C ad G C.

Demon-

Demonstratio.

Ductis G M ipsi A C, & M N ipsi G K parallelis, erit ratio H A ad N A, hoc est D K, duplicata rationis F H ad M N, hoc est F H ad G K, hoc est H C ad K C: sed ratio rectanguli A H C ad D K C [a] composita est ex ratione A H ad D K, hoc est ex duplicata rationis H C ad K C, & ex ipsa ratione H C ad K C; igitur ratio rectanguli A H C ad D K C rectangulum triplicata est rationis H C ad K C, hoc est F C ad G C. Quod erat demonstrandum. a 23. sexti.

Nota.



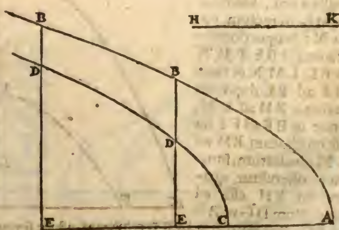
Hæc propositio non solũ admittenda est, si erectâ ex C normali, linea aliqua ex C ducatur inter normalem & parabolarum vertices, sed etiam cum (ut in præsenti schemate) recta C B ex C educta cadat ultra normalem C H: demonstratio enim prorsus universalis est. Ductis quippe L G, ipsi A C, & L M ipsi B E parallelis, erit L G, hoc est M D, æqualis A F; adeoque A M æqualis F D, & ratio A E ad A M, hoc est F D, duplicata rationis B E ad G D, hoc est B C G. Ratio autem rectanguli A E C ad F D C rectangulum composita est ex ratione A E ad F D & ratione C E ad C D.

PROPOSITIO LXIIJ.

Sint duæ parabolæ parallelæ A B B, C D D, quas secet recta B E communi axi perpendicularis.

Dico rationem A E ad C E duplicatam esse rationis B E ad D E.

Demonstratio.



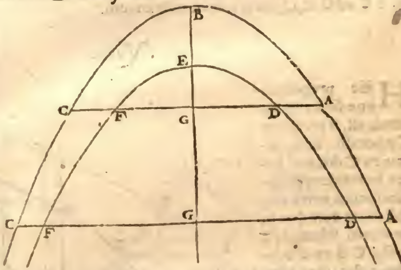
Cum per hypothesim parabolæ sint parallelæ, idem habent latus rectum, quod repræsentet K H; erunt igitur K H, B E, A E, item K H, D E, C E proportionales adeoque [a] ratio A E ad C E duplicata est rationis B E ad D E. a 27. lib. 2. tom. 1.

PROPOSITIO LXIV.

SInt ad axem B G parabolæ parallelæ A B C, D E F constitutæ, sit A C ordinatim ad axem posita:

Dico rectangulum A D C esse ad quadratum D G, ut recta B E ad E G.

Demonstratio.



CUm parabolę ABC, D E F parallelę sint communem habentes axem B G, erit per præcedentem ratio B G ad E G duplicata rationis A G ad D G, adeoque quadratum A G ad D G quadratum ut B G ad E G: igitur dividendo ut excessus rectæ BG supra E G, hoc est B E, ad E G ita excessus quadrati A G supra quadratum D G. Sed quadratum A G [a] excedit quadratum D G rectangulo A D G bis sumpto, hoc est A D F rectangulo, & quadrato A D, [b] hoc est F A D rectangulo, hoc est rectangulo A D C. Igitur rectangulum A D C est ad D G ut quadratum B E ad E G.

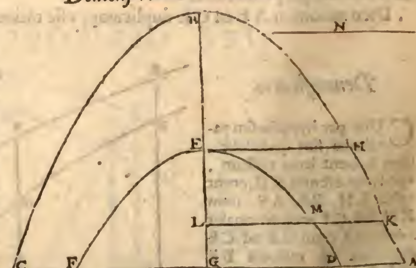
a 4. *secundi.*
b 3. *secundi.*

PROPOSITIO LXV.

POsitis iterum duabus parabolis parallelis A B C, A B F, sit ratio BE ad E L triplicata rationis B E ad E G, & ordinatim positæ sint H E, K L, A C.

Dico rationem quadrati H E ad M L quadratum triplicatam esse ejus rationis, quam habet quadratum H E ad D G quadratum.

Demonstratio.



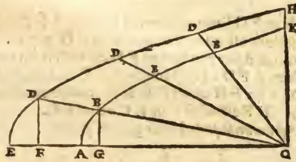
CUm parabolæ A B C, D E F parallelæ sint, idem habent latus rectum, puta N: proportionales itaque sũt B E, E H, N & E L, L M, N & ratio B E ad E L duplicata rationis E H ad L M; unde ut B E ad E L ita est quadratum E H ad L M quadratum; similiter ostenditur quadratum E H esse ad quadratum D G ut B E ad E G. Sed ratio B E ad E L triplicata est ex suppositione, rationis B E ad E G, igitur & ratio quadrati H E ad M L quadratum triplicata est rationis ejus, quam habet quadratum H E ad D G quadratum.

PROPOSITIO LXVJ.

Sit A B K parabolę axis A C, & in illo punctum quodvis C, ex quo eductis quotvis lineis C D, quæ A B K parabolæ occurrant in B, fiat ut C A ad C B ita C E ad C D.

Dico puncta E D D esse ad parabolam, cujus axis E C.

Demonstratio.



Recta ex C normalis C K producatur in H, ut sit C K ad C H sicut C A est ad C E: assumptâque quâvis secantium C B D, demittâtur ex B & D perpendiculares B G, D F. Quoniam ex constructione est ut C A ad C E ita C B ad C D, & ob parallelas B G, D F, est [a] ut C B ad C D ita C G ad C F, erit ut C A ad C E, ita C G ad C F; quare [b] & residuum A G est ad residuum E F, ut C A ad C E, & permutando A G est ad A C ut E F ad E C: sed ut A G ad A C ita quadratum B G ad quadratum C K; igitur ut E F ad E C ita quadratum B G ad C K quadratum. Quia vero est C K ad C H ut C A ad C E, hoc est C B ad C D, hoc est B G ad D F, erit quadratum C K ad C H quadratum ut B G quadratum ad quadratum D F, & permutando ac invertendo ut quadratum B G ad C K quadratum, ita quadratum D F ad quadratum C H. Sed B G quadratum est ad quadratum C K ut A G ad A C, hoc est E F ad E C, igitur ut E F ad E C ita quadratum D F est ad C H quadratum: Quare puncta E, D, H sunt ad parabolam.

a 2. sexti.

b 19. quinti.

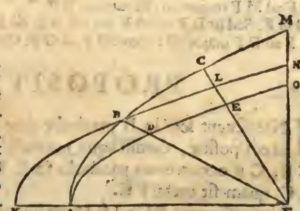
Nota parabolam E D H non esse æqualem aut parallelam A B K parabolæ, ut enim ostensum est in parabolis parallelis ratio C D ad C B semper minor est ratione C E ad C A.

PROPOSITIO LXVIJ.

Parabolæ duæ A B C, A D E ad eundem axem constitutæ, habeant A verticem communem: assumptoque in axe quovis puncto F, educantur ex F secantes duæ F B, F C occurrentes parabolæ A D E in D & E, sic ut angulus A F C major sit angulo A F B.

Dico rationem B F ad D F minorem esse ratione C F ad E F.

Demonstratio.



Fiat ut F D ad F B ita F A ad F K, utque F A ad F K ita F E ad F L: erunt [a] puncta K B L ad parabolam: cujus axis K F: Quia vero B punctum commune est parabolis K B L, A B C, adeoque K B L parabola secat parabolã A B C in B, pars autem K B est extra parabolam A B C, necessario pars reliqua B L cadit inter parabolam A B C & parabolam A D E. Igitur ratio C F ad C E major est ratione L F ad E F, hoc est per constructionem B F ad D F. Quod erat demonstrandum.

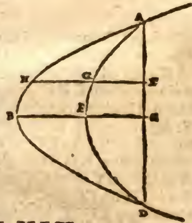
a per præced.

PROPOSITIO LXVIIJ.

INterſecent ſeſe in A & D parabolæ duæ A B D, A E D ad eundem axem conſtitutæ: demiſſâque ex A rectâ A D normali ad axem C B, ponatur quævis F H parallela axi C B, occurrens parabolis in G & H.

Dico H F eſſe ad G F, ſicut B C eſt ad E C.

Demonſtratio.



SIcut F G linea ad lineam C E ita A F D rectangulum eſt ad rectangulum A C D, per 47. lib. 5. tom. 1. ſed per eandem ut F H eſt ad C B ita rectangulum A F D ad rectangulum A C D, igitur ut F G ad C E ita F H eſt ad C B, & permutando ac invertendo H F eſt ad G F ut B C eſt ad E C.

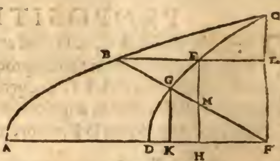
Eſt converſa propoſitionis 329. lib. 5. tom. 1.

PROPOSITIO LXIX.

INterſecent ſeſe in A & D parabolæ duæ A B C, D E C ad eundem axem conſtitutæ: demiſſâque ex C normali C F, ducatur ex F quævis F B occurrens parabolis in B & G:

Dico rationem A F ad D F majorem eſſe, quam ſit ratio B F ad G F.

Demonſtratio.



DUcta B L parallelâ axi A F, ponantur G K, E H parallelæ rectæ C F: Per præcedentem ut A F ad D F ita B L eſt ad E L, hoc eſt B F ad M F. Quia vero E remotius eſt à vertice D, quam ſit ipſum G, & E H, G K normales ſunt ad axem, patet M punctum cadere inter G & F, adeoque rationem B F ad M F majorem eſſe ratione B F ad G F. Sed ut B F ad M F ita eſt B L ad E L, hoc eſt A F ad D F; igitur ratio A F ad D F major eſt ratione B F ad G F. Quod erat demonſtrandum.

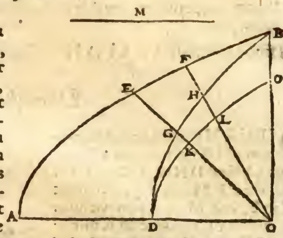
PROPOSITIO LXX.

INterſecent ſeſe in B parabolæ duæ A B C, D B C ad communem axem poſitæ, demiſſâque normali B C ducantur ex C duæ lineæ C E, C F occurrentes parabolis in E, F, G, H; & E C vicinior ſit axi A C, quam ſit recta F C.

Dico rationem E C ad G C majorem eſſe ratione F C ad H C.

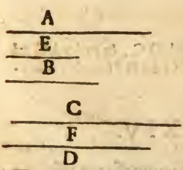
Demon-

Demonstratio.



DEscripta intelligatur parabola D K O parallela parabolæ A B C, habens verticem in D. Quoniam igitur parabolæ D K O, A B C parallelæ sunt, nunquam D K O parabola concurret cum parabola A. B C: quia vero parabola D B C concurrit cum parabola A B C in B, erit [a] ut A C ad D C, ita latus rectum parabolæ D B C ad latus rectum parabolæ A B C, hoc est parabolæ D O C: quare cum B C media sit inter D C & latus rectum parabolæ D B C, & C O media inter latus rectum parabolæ D O C, & rectam D C, sit autem latus rectum parabolæ D O C minus latere recto parabolæ D B C, erit B C recta major lineâ O C, adeoque D K O parabola cadit infra parabolam D B C. Est autem [b] ratio E C ad K C major ratione F C ad L C, & [c] ratio G C ad K C minor ratione H C ad L C, fiat igitur ut C L ad C H ita C K ad M: quoniam ratio G C ad K C minor est ratione H C ad L C, & ratio M ad K C æqualis rationi H C ad L C, patet G C lineam minorem esse quam sit M: Quia vero ratio E C ad K C major est ratione F C ad L C, erit ratio E C ad M major ratione F C ad H C: sed ratio E C ad G C major est ratione E C ad M (cum G C minor sit quam M) igitur ratio E C ad G C major est ratione F C ad H C. Quod erat demonstrandum.

a 51 hujus.
b 60. hujus
c 67. hujus.



Corollarium.

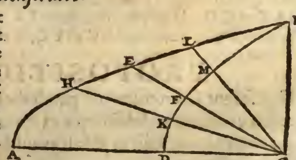
EX hac propositione colligitur, cum duæ rationes A B major, C D minor, dividuntur in duas rationes, per rectas E & F, ita ut ratio E B minor sit ratione F D, rationem A E minorem esse ratione C F.

PROPOSITIO LXXI.

INtersecent sese in B parabolæ duæ A B C, D B C ad eundem axem constitutæ: demissaque ex B normali B C ducatur ex C quævis C E, occurrens parabolis in F & E.

Dico quod non ducetur ex C alia secans parabolas, quæ exhibeat rationem E C ad F C.

Demonstratio.



DUcatur quævis [a] C H, quæ cadat inter E C & C A: ostensum est rationem H C ad K C majorem esse ratione E C ad F C. Ducatur dein quævis alia C L, quæ cadat inter E C & B C. Ostensum [b] rursus est rationem L C ad M C minorem esse ratione E C ad F C: quare cum C H, C L lineæ sint quæcumque, patet ex C aliam duci non posse, quæ exhibeat rationem E C ad F C. Quod erat demonstrandum.

a 70. hujus
b per eandem.

PROPOSITIO LXXIJ.

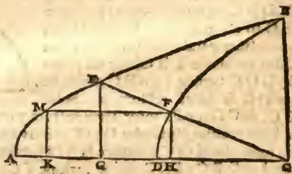
IIsdem manentibus, ex F & E demittantur rectæ E G, F H normales ad axem.

Dico rationem A G ad D H majorem esse ratione A C ad D C.

Demonstratio.

DUctâ F M parallelâ axi A C, ponatur M K normalis ad A C: erit igitur [a] A K ad D H ut A C ad D C: Quia vero F M parallela axi secat E C in F, erit M punctum vicinius axi, quam sit E, adeoque M K minor quam E G, & G punctum cadit inter K & H; quare ratio A G ad D H major est ratione A K ad D H, hoc est A C ad D C. Quod erat demonstrandum.

a 53. hujus.



PROPOSITIO LXXIIJ.

IIsdem manentibus; Dico rationem A G ad D H majorem esse ratione E C ad F C.

Demonstratio.

QUoniam ratio A G ad D H [a] major est ratione A C ad D C, & ratio A C ad D C, [b] major ratione E C ad F C, patet rationem A G ad D H multo majorem esse ratione E C ad F C, Quod fuit demonstrandum.

a per præcedentem. b 69. hujus

PROPOSITIO LXXIV.

IIsdem manentibus: Dico rationem A G ad D H compositam esse, ex ratione duplicatâ rationis E C ad F C, & ex ratione A C ad D C.

Demonstratio.

POsitâ iterum F M parallelâ axi A C, & M K normali ad eundem axem, ratio A G ad D H composita est ex ratione A G ad A K & ex ratione A K ad D H. Quia vero quadratum E G est ad quadratum M K ut A G ad A K, ratio A G ad A K duplicata est rationis E G ad M K, hoc est E G ad F H, hoc est E C ad F C: Ratio vero A K ad D H eadem est cum ratione A C ad D C, igitur ratio A G ad D H composita est ex duplicata ratione E C ad F C, & ex ratione A C ad D C.

PROPOSITIO LXXV.

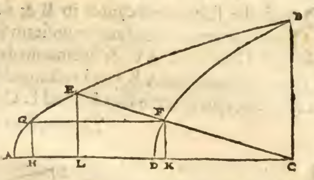
INtersecent sese iterum in B parabolæ duæ A B C, D B C ad eundem axem constitutæ; demissâque ex B normali B C, ducatur ex C quævis C E, occurrens parabolis in E & F, ex quibus punctis demittantur E L, F K normales ad axem.

Dico rationem segmenti A E L ad segmentum D F K, compositam esse ex ratione triplicata E C ad F C & ex ratione A C ad D C.

Demon-

Demonstratio.

DUctâ F G parallelâ A C, ponatur G H æquidistans rectæ E L. Ratio segmenti A E L ad segmentum D F K composita est ex ratione segmenti A E L ad segmentum A G H, & ex ratione segmenti A G H ad segmentum D F K. Sed [a] ratio segmenti A E L ad A G H segmentum triplicata est rationis E L ad G H, hoc est E L ad F K, hoc



a 241. l. 5. tom. 1.

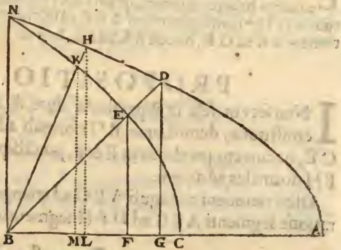
est E C ad F C: ratio autem segmenti A G H ad segmentum D F K, est [b] ratio parabolæ A B C ad parabolam D B C, hoc est ratio A C ad D C, igitur ratio segmenti A E L ad segmentum D F K, composita est ex ratione triplicata E C ad F C, & ex ratione A C ad D C.

b 54. hujus.

PROPOSITIO LXXVI.

INtersecent sese duæ parabolæ A N B, C N B, ad eundem axem positæ, in N; demissâque ordinatim N B, ex puncto B ducatur B D, quæ secet parabolas in E & D ita ut ratio A B ad B C duplicata sit rationis D B E, denique ponantur ordinatim E F, D G.

Dico rationem segmenti D A G ad E C F segmentum, quintuplicatam esse rationis quam habet D B ad B E.



Demonstratio.

PEr propositionem præcedenté ratio segmenti D A G ad segmentum E C F composita est ex triplicata ratione D B ad E B, & ex ratione A B ad C B, quæ cum per constructionem duplicata sit rationis D B E, patet rationem segmenti D A G ad E C F segmentum quintuplicatam esse rationis ejus quam habet D B ad B E.

PROPOSITIO LXXVII.

IIsdem manentibus ducatur ex B recta B H ut ratio D B E duplicata sit rationis H B K, ducanturque H L, K M ordinatim ad axem A B.

Dico segmentum A H L ad C K M segmentum habere rationem septuplicatam rationis H B ad B K.

Demonstratio.

CUm ratio A B C ex constructione duplicata sit rationis D B E, quæ duplicata ponitur rationis H B K, erit ratio A B C quadruplicata rationis H B K. Quare cum ratio segmenti A H L ad C K M segmentum componatur [a] ex triplicata ratione H B K & ex ratione A B C, patet segmentum A H L ad segmentum C K M habere rationem septuplicatam rationis H B K.

a 75. hujus.

PRO-

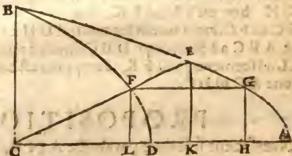
PROPOSITIO LXXVIII.

PArabolæ ſeſe interſecantes in B & ad eundem axem applicatæ, habeant communem ordinatim poſitam B C,& ex C ductâ quâvis C F E, ponatur F G parallela A C, & ordinatim demittantur F L, G H:

Dico rectangulum A K C ad rectangulum A H L C triplicatam habere rationem, ejus quam habet K C ad L C.

Demonſtratio.

RAtio rectanguli A K C ad A H L C rectangulum compoſita eſt ex ratione A K ad A H, hoc eſt ex duplicata ratione rationis E K ad G H, hoc eſt F L, hoc eſt ex ratione duplicata rationis K C ad L C, & ex ratione K C ad L C. Igitur ratio rectanguli A K C ad A H L C rectangulum triplicata eſt rationis K C ad L C.



Corollarium.

EX hac propoſitione manifeſtũ eſt rectangulum A K C ad rectangulum A H C L eandem habere rationem, quam habet ſegmentum parabolæ A E K ad ſegmentum A G H, [a] cum ſegmentum A E K ad ſegmentum A G H triplicatam habeat rationem E K ad G K, hoc eſt E K ad F L, hoc eſt K C ad L C.

a 241. l. 5. tom. 1.

PROPOSITIO LXXIX.

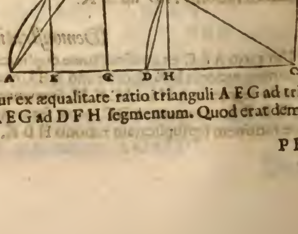
INterſecent ſeſe in B parabolæ duæ A B C, D B C ad eundem axem conſtitutæ; demiſſâque B C normali ad axem, ducatur ex C quævis C E, occurrens parabolis in E & F, junctiſque A E, F D demittantur E G, F H normales ad axem:

Dico rationem trianguli A E G ad triangulum D F H eandem eſſe cum ratione ſegmenti A E G ad D F H ſegmentum.

Demonſtratio.

DUctâ F L parallelâ axi A C, ponatur L K normalis ad axem, & jungantur A, L. Ratio trianguli A E G ad triangulum D F H compoſita eſt ex ratione trianguli A E G ad A L K triangulum, & ex ratione trianguli A L K ad D F H triangulum. Sed ratio trianguli A E G ad triangulum A L K, eſt [a] ratio ſegmenti A E G ad ſegmentum A L K, & ratio trianguli A L K ad triangulum D F H eſt [b] ratio ſegmenti A L K ad D F H ſegmentum. Igitur ex æqualitate ratio trianguli A E G ad triangulum D F H, eſt ratio ſegmenti A E G ad D F H ſegmentum. Quod erat demonſtrandum.

a ex 240. l. 5. tom. 1.
b ex eadem

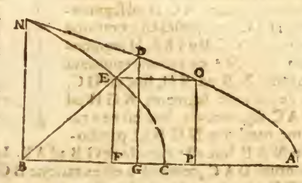


PROPOSITIO LXXX.

PArabolæ A N B, C N B ad communem axem constitutæ intersecent sese in N, demissáque N B normali ad axem, ducatur B E quæcumque, & ex E ad axem ordinatim demittatur E F:

Dico rationem segmenti N A B ad C E F segmentum, habere rationem compositam ex ratione triplicata N B ad E F, & ex ratione A B ad C B.

Demonstratio.



PEr punctum E ducatur axi parallela E O, & ex O ordinatim sit ad axem O P. Ratio segmenti N A B ad E C F segmentum, composita est ex ratione segmenti N A B ad segmentum O A P, & ex ratione segmenti O A P ad segmentum E C F. Sed [a] ratio segmenti N A B ad segmentum O A P triplicata est rationis N B ad O P, hoc est N B ad E F, & [b] ratio segmenti O A P ad E C F segmentum eadem est cum ratione segmenti N A B ad N C B segmentum, hoc est [c] ut A B ad C B. Igitur ratio segmenti N A B ad segmentum E C F composita est ex triplicata ratione N B ad E F, & ex ratione A B ad C B.

a 241. 1. 5. tom. 1.
b 54. huius
c coroll. 240. lib. 5. tom. 1.

PROPOSITIO LXXXI.

IIsdem manentibus, ducatur quoque ex D recta D G parallela N B.

Dico segmentum A N B ad C E F segmentum, habere rationem compositam ex ratione triplicata N B ad D G, & triplicatâ D B ad E B, & ex ratione A B ad C B.

Demonstratio.

RAtio segmenti A N B ad C E F segmentum est composita ex ratione segmenti A N B ad segmentum A D G, hoc est ex triplicata ratione N B ad D G; [a] & ex ratione segmenti A D G ad segmentum C E F, [b] quæ composita est ex triplicata ratione D B ad E B & ratione A B ad C B. Igitur ratio segmenti A N B ad C E F segmentum composita est ex ratione triplicata N B ad D G, & triplicatâ ratione D B ad E B, & ratione A B ad C B.

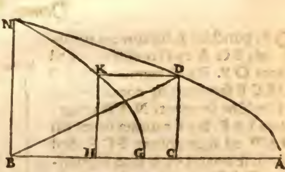
a 241. 1. 5. tom. 1.
b 75. huius

PROPOSITIO LXXXIJ.

SInt iterum parabolæ ad axem communem positæ, quæ sese intersecent in N, & ex N ordinatim posita ad axem recta N B, ductâque quavis B D demittatur D C normalis ad axem.

Dico rationem segmenti N G B ad D A C segmentum, compositam esse ex ratione B G ad B A & ex triplicata ratione N B ad D C.

Demonstratio.



DUcatur D K parallela axi, cui K H insistat perpendiculariter: Ratio segmenti N G B ad segmentum D A C, composita est ex ratione segmenti N G B ad K G H segmentum, hoc est [a] ex ratione triplicata rationis N B ad K H, hoc est D C, & ex ratione segmenti K G H ad D A C segmentum, hoc est [b] ex ratione parabolæ N G B ad parabolam N A B, hoc est [c] ex ratione G B ad A B. Igitur ratio segmenti N G B ad segmentum D A C, composita est ex ratione B G ad B A & ex ratione triplicata N B ad D G. Quod erat demonstrandum.

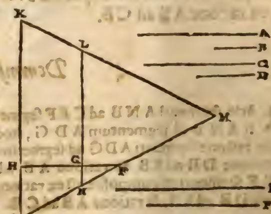
a 241. l. 5. tom. 1.
b 54. hujus
c 52. hujus.

PROPOSITIO LXXXIIJ.

DAtæ sint tres rationes majoris inæqualitatis, A B maxima, C D trium media, E P minima.

Oporteat lineis E, P rationis minimæ, adjungere lineas habentes rationem maximam A B, ita ut ratio aggregati ad aggregatum, sit eadem cum ratione C ad D.

Constructio & Demonstratio.

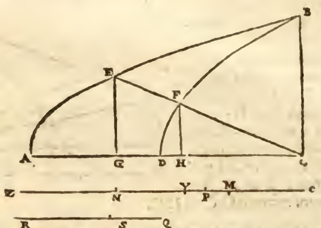


ASsumatur quævis F H, quæ dividatur in G, ut F H sit ad F G ut A est ad B: dein ex H & G normales erigantur H K, G L, sic ut H K sit æqualis E, & G L sit æqualis P; junctaque K L producatur in M, ut K M sit ad L M ut C ad D: deinde juncta M F producatur, ut L G, K H productis occurrat in N & O: quod fiet, cum ratio H F ad G F ex hypothesi major sit ratione K M ad L M, adeoque M F non sit parallela ipsi LG. His positis. Dico rectas L N, K O esse eas, quæ requiruntur. Quoniam H K æqualis est rectæ E, & L G æqualis ipsi P, ut E ad P, ita H K est ad L G: est autem H O addata ipsi H K, hoc est E, ad G N additam ipsi L G, hoc est P, ut H F, ad G F, hoc est per constructionem A ad B: Aggregatum insuper KO est ad aggregatum L N, ut K M ad L M, hoc est per constructionem ut C ad D, igitur lineis E, P, hoc est K H, L G, adjunximus lineas H O, G N habentes rationem H F ad G F, id est A ad B, sic ut aggregatum KO sit ad aggregatum L N, ut K M ad L M, hoc est C ad D. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIV.

INtersecent sese in B parabolæ duæ A B C, D B C ad eundem axem constitutæ; demissâque normali B C, Oporteat ex C rectam ducere, occurrentem parabolis in F & E, ut E C ad F C datam habeat rationem, quam minorem esse oporteat ratione A C ad D C.



Constructio & Demonstratio.

DAta esto ratio N O ad P O cujus duplicata ponatur N O ad M O: insuper ratio N O ad M O ducta in rationem A C ad D C exhibeat rationem R Q ad S Q. Erit igitur ratio R Q ad S Q major ratione N O ad P O, ut patet: & eadem ratio R Q ad S Q major ratione A C ad D C. Est autem ratio A C ad D C, ex hypothesi, major ratione N O ad P O, igitur trium rationum minima est ratio N O ad P O, maxima vero ratio R Q ad S Q, media denique ratio A C ad D C: quare per præcedentem rectis N O, P O addantur lineæ Z N, Y P habentes rationem R Q ad S Q, ita ut ratio totius Z O ad Y O sit eadem cum ratione media A C ad D C: tum A C dividatur in G & H, sicut Z O divisa est in N & P, ponanturque ordinatim ad axem A C rectæ G E, H F. Dico puncta C, F, E esse in directum. & C E lineam esse requisitam. Factum enim esto quod quæritur, & E C ad F C datam habeat rationem N O ad P O, igitur & E G ad F H, hoc est G C ad H C, erit ut N O ad P O: Est autem a ratio A G ad D H composita ex duplicata ratione E C ad F C, hoc est G C ad H C, hoc N O ad P O, & ex ratione A C ad D C; & per constructionem ratio R Q ad S Q ex iisdem composita est, igitur A G est ad D H ut R Q ad S Q. Rursum est per constructionem rationi G C ad H C, hoc est N O ad O P, additum est auctarium rationis A G ad D H, hoc est R Q ad S Q, ita ut tota A C ad D C habeat rationem totius Z O ad Y O. Igitur patet, divisâ A C in G & H ut Z O in & P, ordinatim positas G E, H F exhibere rationem datam N O ad P O, ac designare puncta E & F, quæ cum C sunt in directum, adeoque dare lineam quæsitam E F C.

a 74. *hujus*

Corollarium.

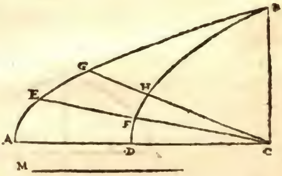
HInc manifestè colligitur omnes rationes medias inter rationem axium A C ad D C, & rationem æqualitatis B C ad B C, posse exhiberi per lineam aliquam ex C ductam, & à parabolis intersectam.

PROPOSITIO LXXXV.

INtersecent se parabolæ A B C, D B C ad eundem axem constitutæ in puncto B, à quo ponatur ordinatim B C, & positâ quâvis C E: Oporteat exhibere C G, ut ratio E C ad C F duplicata sit rationis G C ad C H.

Constructio & Demonstratio.

POnatur M media proportionalis inter E C & F C, & per præcedentem ducatur ex C linea C H G, ut G C ad H C habeat rationem E C ad M, quod fieri poterit cum ratio E C ad M sit minor ratione E C ad F C, adeoque multo minor ratione A C ad D C. Dico G C lineam esse quæsitam: Patet. Cum enim M media sit proportionalis inter E C & F C, ratio E C ad F C duplicata est rationis E C ad M, hoc est per constructionem rationis G C ad H C.



PROPOSITIO LXXXVI.

PArabolam A B C secet recta B C ordinatim collocata ad axem D E, & positâ A F, quę ęquidistet axi, ducatur A E, quam secet recta quævis G H parallela F A: & inventâ tertiâ proportionali ad rectas G E, B E, nempe K E, ex H ducatur recta per punctum K, quæ occurrat axi in L, & angulo A E B fiat æqualis B E M, sitque K M axi parallela.

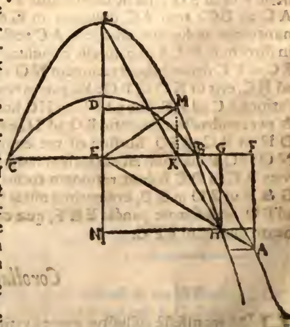
Dico puncta H, B, M, L esse ad eandem parabolam, cujus axis est L E.

Demonstratio.

QUoniam proportionales sunt rectæ G E, B E, K E, & G H ipsi L E parallela, [a] igitur puncta H, B, L, sunt ad parabolam, cujus axis L E. Quia vero ex constructione æquales sunt anguli A E B, B E M, & K M parallela ponitur axi L E, igitur ubi occurrit K M ipsi E M ponatur M D parallela B E, & similiter per punctum H ponatur H N, erunt similia triangula M D E, E H N & M D ad H N ut D E ad E N, sed etiam M D, hoc est K E, est ad H N ut L E ad L N, igitur L E est ad L N ut D E ad E N, adeoque [b] proportionales sunt L D, L E, L N: Cum igitur puncta H, B, L, sint ad parabolam cujus axis L N, erit ratio L E ad L N, hoc est D E ad E N, hoc est M D ad H N duplicata rationis B E ad H N. Quare proportionales sunt rectæ M D, B E, H N & quadratum M D ad B E quadratum, ut M D ad H N, hoc est D E ad E N, hoc est L D ad L E, sunt itaque puncta B, M, L, & consequenter H, B, M, L, ad eandem parabolam, cujus axis L N & vertex punctum L. Quod demonstrare oportuit.

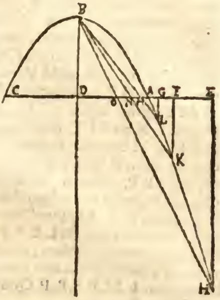
a per conversam 42. lib. 5. tom. 1.

b 1. lib. 2. tom. 1.



PRO-

PROPOSITIO LXXXVII.



PArabolam A B C ſecet ordinatim ad axem poſita recta E D, ſintque proportionales E D, F D, A D: & ſimiliter F D, G D, A D: poſitiſque E H, F K, G L axi parallelis, jungantur H B, K B, L B:

Dico etiam E D, A D, O D & F D, A D, N D, denique G D, A D, M D proportionales eſſe.

Demonſtratio.

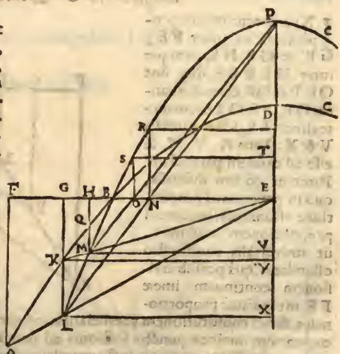
OStenſum eſt propoſitione 42. lib. 5. tom. 1. ſi recta E H axi parallela, occurrat ordinatim poſitæ E C, & ducatur recta H B ad verticem ſectionis, quod rectæ E D, A D, O D ſint proportionales, igitur per eandem etiam proportionales ſunt F D, A D, N D & ulterius G D, A D, M D.

PROPOSITIO LXXXVIII.

SIt iterum parabola A B C cujus axis D E, ad quem ſit ordinatim poſita B C, & quædam F A ſit parallela axi: fiant autem F E, G E, B E proportionales, uti & G E, H E, B E, & ſtatuantur G K, H Q parallelæ axi, quæ occurrant rectis A E, K E, in L & M: denique fiant proportionales G E, B E, N E, & H E, B E, O E, & per puncta N & O ducantur L N, M O, donec conveniant cum axe parabolæ A B C.

Dico puncta L, M, B, P eſſe ad eandem parabolam, cujus axis communis ſit cum linea axeos parabolæ A B C.

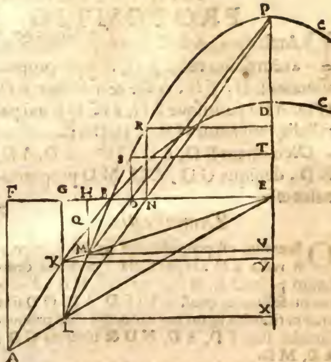
Demonſtratio.



QUoniam proportionales ſunt G E, B E, N E ª puncta L, B, & P, ubi convenit L N cum D E, ſunt ad parabolam, & ob eandem cauſam ſunt ad parabolam puncta, M, B & P, ubi concurrit recta M O cum recta D E. Oſtendendum itaque reſtat, quod parabolæ hæ duæ non ſint, ſed una & eadem. Sint itaque puncta P, R, B, L ad eandem parabolam, ponanturque ordinatim R D, L X: Quoniam igitur ex conſtructione G E, B E, N E, hoc eſt L X, B E, R D proportionales ſunt, etiam P X, P E, P D erunt in continua analogia. Fiat autem P V media inter PE & P X, & inter B E, L X media ſit recta V M æqualis H E, igitur H Q M linea æquidiſtat axi D E, eruntque puncta L, M, B ad

ª 86. hujus

parabolam cujus vertex est punctum P: nam lineæ P E, P V, P X sunt proportionales, sicut & quadrata linearum B E, M V, L X, quæ sunt in eadem ratione cum lineis P E, P V, P X. Et quia G E est ad H E, ut L X ad M V, utque G E ad H E ita quoque K E ad M E; igitur ut K E ad M E ita quoque L X ad M V. Est itaque punctum M communis intersectio linearum H Q, K E & sectionis L M B P. Eodem discursu ostendetur, quod sint ad parabolam puncta B, S, R cujus est vertex P. Sed cóstat puncta L, B, R, P, esse ad eandem parabolam, cujus vertex P: igitur ad eandem parabolam sunt L, M, B, S, R, P. Quod erat demonstrandum.



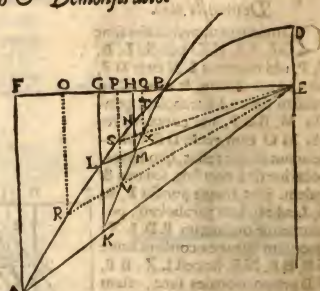
PROPOSITIO LXXXIX.

PArabolã ABD secet ordinatim ad axem posita recta BE, quâ productâ in F, fiant proportionales F E, G E, B E, & G E, H E, B E: ex punctis autem F, G, H ponantur F A, G L, H N axi parallelæ, quæ occurrant rectis A E, L E in punctis K & M. Ostensum est puncta K, M, B esse ad eandem parabolam, cujus vertex est in recta E D producta.

Oporteat autem puncta intermedia per ejusdem constructionis continuationem exhibere.

Constructio & Demonstratio.

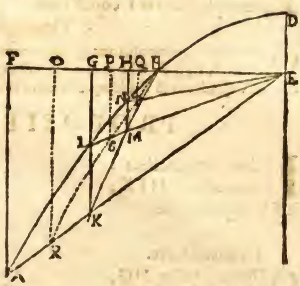
INveniantur mediæ proportionales inter F E, G E, & G E, H E, denique inter H E & B E, quæ sint O E, P E, Q E, & constituantur O R, P S, Q T occurrentes lineis R E, S E in punctis V & X: Dico K, V, M, X esse ad eandem parabolam. Patet ex eodem discursu, quo in præcedenti propositione usi sumus. Hanc autem propositionem attulimus, ut universalis constructio ostendatur, quâ per subdivisionem continuam lineæ F E, in continuè proportionales, & per constitutionem parallelarum axi, per puncta inventa in linea F E, occurrentium lineis ex punctis sectionis ad punctum E deductis, ubi parallelæ axi occurrunt sectioni, omnia puncta reperiri possint, ne videatur constructio paucis solummodo punctis inveniendis inservire, cum verè universalis sit.



Corol-

Corollarium 1.

Hinc colligitur qua ratione, inventâ quâdam parabolâ KMB, per constructionem paulo ante allatam, etiam alia exhiberi queat, quæ media sit inter parabolas A B C & K M B, utendo semper eadem praxi aut constructione: Nam si ex punctis O, P, Q parallelæ axi protrahantur in lineas A E, L E, N E apparebunt puncta R, S, T, B, quæ omnia similiter ad unam eandemque parabolam pertinebunt, non minus atque puncta, M, B, omniumque illarum parabolarum vertices in D E axe producto exhibebuntur.



Corollarium 2.

Hinc etiam patet quod, cum subdivisiones rectæ F E & B E in infinitum semper possint continuari, ac proinde aliæ atque aliæ parabolæ hac praxi emergant, rectè inferatur omnes parabolas, quæ transeunt per puncta B & C, habentes verticem in recta D E producta, posse eadem praxi describi, nec ullam esse quæ simili constructioni non subjaceat.

PROPOSITIO XC.

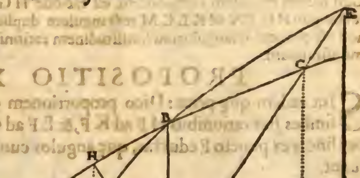
Habeant duæ parabolę A B C, D B E ad eundem axem positę, communem B F ordinatim ad axem positam, & ductæ sint quæcumque FH, F E angulos constituentes æquales cum recta B F: denique ordinatim constituantur H G, K L, C M E N.

Dico rectangulum G A M ad rectangulum L D N in duplicata esse ratione lineæ A F ad D F.

Demonstratio.

Per 32. lib. 5. tom. 1. proportionales sunt rectæ A G, A F, A M; & per eandem etiam proportionales sunt D L, D F, D N. Quare ᵃ rationes A G ad D L, A F, ad D F, A M ad D N proportionales sunt, & ratio A G ad D L ducta in rationem AM ad DN producit idem quod ratio A F ad D F ducta in se, hoc est duplicatam rationem A F ad F D. Sed ratio rectanguli G A M ad L D N rectangulum componitur ex ratione A G ad D L & ex ratione A M ad D N; igitur ratio rectanguli G A M ad rectangulum L D N duplicata est rationis, quam habet recta A F ad rectam D F. Quod erat demonstrandum.

ᵃ 245. lib. 8. tom. 1.



PRO-

PROPOSITIO XCI.

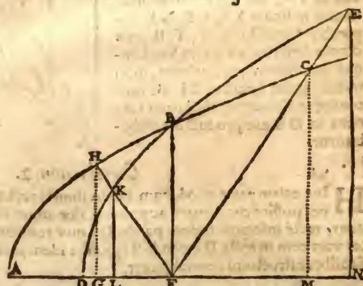
Iisdem manentibus: Dico rectangula H G C M, K L E N tam inter se, quam quadrato B F ęqualia esse.

Demonstratio.

Ostensum est propositione 33. lib. 5. tom. 1. tam rectas H G, B F, C M, quam rectas K L, B F, E N proportionales esse. Patet igitur rectangula H G C M, K L E N quadrato B F adeoque & inter se esse æqualia esse.

PROPOSITIO XCIJ.

Iisdem manentibus: Dico rationes H F K, E F C æquales esse.



Demonstratio.

Quoniam rectæ H G, K L, & C M, E N parallelæ sunt, H F est ad K F ut H G ad K L, utque E N ad C M ita E F est ad C F. Cum itaque per præcedentem rectangula H G C M, K L E N æqualia sint, H G est ad K L ut E N ad C M; adeoque & H F ad K F ut E F ad C F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCIIJ.

Iisdem manentibus: Dico rectangulum H G E N ad K L C M rectangulum esse in duplicata ratione H F ad K F.

Demonstratio.

Per penultimam æqualia sunt rectangula H G C M, K L E N igitur H G est ad K L ut E N ad C M. Cum igitur rectangulum H G E N ad rectangulum K L C M habeat rationem compositam, ex ratione H G ad K L & E N ad C M, ratio rectanguli H G E N ad K L C M rectangulum duplicata est rationis H G ad K L, hoc est propter triangulorum similitudinem rationis H F ad K F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCIV.

Sint eadem quę prius: Dico proportionem ęqualium rationum, quę similes sint rationibus H F ad K F, & E F ad C F, non esse assignabilem per lineas ex puncto F eductas, quę angulos cum recta B F ęquales constituant.

Demonstratio.

a 71. hujus Ostensum est [a] rationi H F ad K F similem exhiberi non posse per lineam ductam ex F inter lineas A F, & B F: patet quoque ex præcedentibus propositionibus, rectam F E ductam, ut cum B F angulum æqualem constituat angulo B F G, exhibere rationem æqualem rationi H F C. Igitur cum nulla alia linea ducta inter B F & A F, possit dare rationem æqualem rationi H F ad F K, etiam nulla alia poni poterit inter B F & F N, cum anguli B F A, B F N æquales sint. Igitur proportio rationis H F K ad E F C rationem non nisi semel potest exhiberi.

PRO-

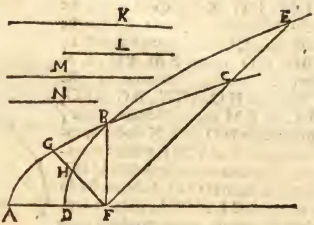
PROPOSITIO XCV.

HAbeant parabolæ A B C, D B E ad eundem axem positæ, B F communem ordinatim ad axem:

Dico omnem proportionem rationum similium, quæ minores sint ratione A F D, exhiberi posse per duas lineas ex F productas continentes, angulos æquales cum linea axeos.

Demonstratio.

DAta sit proportio rationis K L ad similem rationem M N, sint autem rationes K L, M N minores ratione A F D; & fiat rationi K L æqualis ratio G F H per 84. hujus, deinde angulo B F G æqualis fiat angulus B F E: per 92. hujus similes erunt rationes G F H, E F C; & quia [a] quævis ratio minor ratione A F D constitui potest, per aliquam lineam ex F ductam, patet veritas hujus propositionis. a 85. hujus.



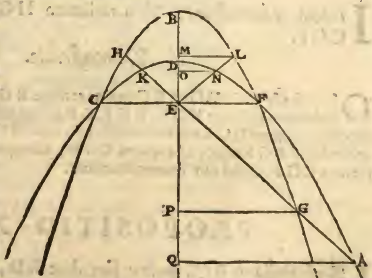
PROPOSITIO XCVJ.

HAbeant parabolæ F D C, F B C, quarũ axis sit B E, communem ordĩtim positam C E F, & quævis per E ducta sit A H, secans parabolas in A, G, K, H.

Dico A H proportionaliter sectam esse in G & K.

Demonstratio.

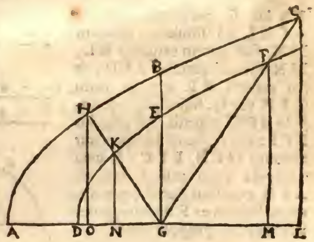
FIat angulo A E F, hoc est angulo C E H, æqualis angulus F E L; erit E L æqualis rectæ E H, eritque secta in N ut E H in K, cum ex constructione B E sit axis communis parabolarum F B C, F D C, sitque punctum E in axe B E. Ponantur igitur ordinatim L M, N O, G P, A Q: quoniam angulum A E L bisecat recta E F ordinatim posita, [a] erunt tam L M, E F, G P, quam N O, F E, A Q proportionales: igitur rectangula L M G P, N O A Q quadrato F E, adeoque & inter se æqualia sunt, unde L M est ad N O ut A Q ad G P. Sed ut L M ad N O ita L E est ad N E, hoc est H E ad K E, utque A Q ad G P ita A E est ad E G, igitur A E, & L E, hoc est A E & H E, hoc est A H proportionaliter secta est in G & K. Quod erat demonstrandum. a 33. lib. 5. tom. 1.



PROPOSITIO XCVIJ.

SInt parabolæ parallelæ ABC, DEF, & recta GB ordinatim posita, dividat bifariam angulum CGH:
Dico rationes HGK, BGE, CGF proportionales esse.

Demonstratio.



EX punctis C, F, H, K ordinatim ad axem demittantur rectæ CL, FM, HO, KN: Cum itaque ex constructione bifariam divisus sit
a 33. lib. 5. tom. 1. angulus CGH, erunt [a] tam CL, BG, HO, quam FM, EG, KN proportionales, adeoque & ipsæ
b 145. lib. 5. tom. 2. [b] rationes HO ad KN, BG ad EG, LC ad FM proportionales sunt, unde ratio HO ad KN ducta in rationem CL ad FM producit rationem duplicatam rationis BG ad EG, hoc est ratio HO ad KN, ducta in rationem CL ad FM, producit eandem rationem, quam producit ratio BGE ducta in se. Per elementa autem, cum rectæ CL, FM, & HO, KN parallelæ sint, ratio GKH eadem est cum ratione HO ad KN & ratio CGF eadem est cum ratione CL ad FM igitur ratio HGK ducta in rationem CGF eandem rationem producit, quam ratio HO ad KN ducta in rationem CL ad FM, hoc est eandem quam producit ratio BGE in se. Patet itaque rationes HGK, BGE, CGF esse proportionales.

PROPOSITIO XCVIII.

IIsdem manentibus: Dico rationem HGK majorem esse ratione CGF.

Demonstratio.

OStensa est [a] ratio HG ad KG major ratione BG ad EG, cum igitur per præ-
a 60. hujus cedentem rationes HGK, BGE, CFG sint proportionales, [b] ratio HGK
b 5. lib. 1. superat rationem BGE eodem excessu, quo ratio BGE superat rationem CGF:
tom. hujus. igitur ratio BGE major est ratione CGF, adeoque ratio HGK multo major ratione CGF. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XCIX.

IN parabola ABC, positæ sint duæ BD, CE ordinatim ad axem, quæ bisecent angulos FDG, HEK æquales:
Dico rationem FD ad DG minorem esse quam sit ratio HE ad KE.

Demon-

Demonſtratio.



Fiat EL æqualis A D, & deſcriptâ per L parabolâ L M N parallelâ parabolæ A B C, erunt rectæ M E, R E, N E rectis F D, B D, G D æquales, cum ex conſtructione rectæ A D, L E, parabolæ A B C, L M N, & anguli F D G, H E K æquales ſint. Igitur ratio M E ad E N cadem eſt cum ratione F D ad D G, & ratio H E K eſt ad rationem M E N, ut eadem ratio H E K eſt ad rationem F D G; ſed [a] ratio H E K eſt ad rationem M E N ut ratio H E M ad rationem K E N; igitur cum per præcedentem ratio H E M major ſit ratione K E N, etiam ratio H E K major eſt ratione M E N, hoc eſt ratio F D G minor eſt ratione H E K. Quod erat demonſtrandum.

a 39. lib. 8. tom. 2.

 PARS

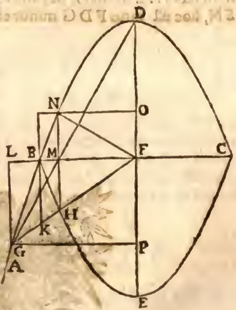
PARABOLÆ
PARS TERTIA
De Parabolis ad eundem axem subcontrariè positis.

PROPOSITIO C.

SInt duæ parabolæ æquales subcontrariæ B D C, B E C quarum axis D E & communis ordinatim posita B F C; ex puncto verò F ducatur quævis recta F G, occurrens sectioni alteri in H, & parallelæ rectæ D E, ductæ ex puncto B, in puncto K.

Dico tres lineas F G, F K, F H proportionales esse.

Demonstratio.



POnantur G L, H M quæ æquidistent axi D E, & conveniat H M cum sectione in puncto N, ordinatimque ponantur N O, G P. Quoniam parabolæ æquales subcontrariè positæ sunt ex constructione, M H æqualis est rectæ M N ac proinde [a] angulus N F M angulo H F M æqualis, sicut & N F O æqualis angulo G F P: [b] proportionales igitur sub rectæ D O, D F, D P, & & consequenter [c] N O, D F, G P, hoc est F M F B, F L ills æquales. Sed ut F M, F B, F L ita quoque sunt F H, F K, F G, sunt itaque tres illæ lineæ in continua analogia. Quod fuit demonstrandum.

a 4. *primi.*
b 32. *lib.* 5. *tom.* 1.
c 33. *ibidem.*

Corollarium.

HInc apparet, si ducatur ex G ad D recta G D eandem lineam per punctum M transire. Ostensum enim est [d] lib. 5. tom. 1. quod (si ex vertice parabolæ demittatur axis D F, & ex eodem puncto alia recta secans D G) omnes lineæ interceptæ inter G L æquidistantem axi & ipsum axem, perpendiculares autem ad eundem axem, dividantur ab ipsa sectione & à linea secante in tres continuæ proportionales. Unde cum L F à sectione & rectâ G D in punctis B & M proportionaliter divisa sit, patet punctum M commune esse rectis L F, G D, H N.

d *prop.* 42.

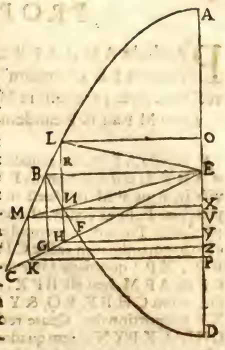
PROPOSITIO CI.

SInt parabolæ A B C, D B E æquales subcontrariè positæ, & B E communis ordinatim applicata ad axem, ductaque E C occurrat sectionibus in punctis F & C, sitque G B parallela axi; deinde E H, E K mediæ sint inter E F, E G, & E G, E C: denique fiant H L, K M axi parallelæ.

Dico puncta M, N, E esse in directum.

Demon-

Demonstratio.



POnantur ordinatim, L O, N X, M V, H Y, G Z, K P. Quoniam igitur proportionales sunt rectæ K E, G E, H E, etiam sunt proportionales K P, G Z, H Y, hoc est M V, B E, L O, igitur [a] angulus M E D æqualis est angulo A E L & recta L N bisecta in R. Quia vero recta A E est ad A O ut quadratum B E ad L O quadratum, & recta A E æqualis lineæ D E, & recta A O lineæ D X, quadratum vero B E ad quadratum N X ut recta D E ad D X, hoc est A E ad A O, erit quadratum N X æquale quadrato L O, adeoque recta N X æqualis est lineæ L O, prout terminatur N X in parabola D B E. Sed etiam prout terminatur in linea M E est ratio K E H æqualis rationi M E N, hoc est M V ad N X. Jgitur punctum N est communis intersectio sectionis D B E & E M, unde patet puncta M, N, E esse in directum.

a 32. lib. 5. tom. 1.

PROPOSITIO CIJ.

IIsdem manentibus: Dico rationem C E F majorem esse ratione M E N.

Demonstratio.

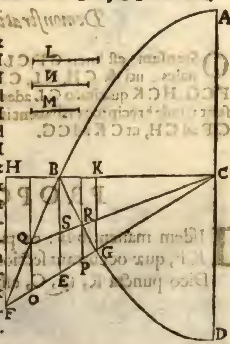
PEr elementa ratio C E F major est ratione K E F, & ratio K E F major ratione K E H; igitur ratio C E F multo major est ratione K E H. Quoniam igitur parallelæ sunt rectæ K M, H N, rationi K E H æqualis est ratio M E N, unde & ratio C E F major est ratione M E N. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CIII.

SInt iterum parabolę A B C, D B C subcontrariè positę & æquales, sitque B C communis ordinatim posita: ductâ deinde B E parallelâ axi, ponatur quævis C F.

Dico omnem rationem, minorem ratione F C G & majorem ratione æqualitatis, exhiberi posse per lineam aliquam inter C B, C F ductam.

Demonstratio.



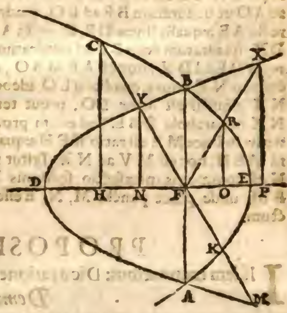
SIt quævis ratio L M minor ratione F C G & major ratione B C B. Inveniatur autem N media proportionalis inter L & M, & fiat ut N ad L ita C E ad C O, utque N ad M ita C E ad C P. Quia igitur ex constructione ratio L ad M minor est ratione F C G, erit quoque ratio L ad N minor ratione C F ad C E, & ratio N ad M minor ratione C E ad C G. Igitur puncta O & P cadunt inter F, E & E, G. Ducantur itaque ex O & P rectæ O Q, P R parallelæ axi, erunt [a] puncta Q, R, C in directum, & ratio Q C R eadem cum ratione O C P, hoc est ex constructione eadem cum ratione L ad M. Quare cum idem discursus procedat in quâvis ratione, quæ minor est ratione F C G, & major ratione B C B, patet omnem rationem talem posse exhiberi per aliquam lineam ductam ex C inter lineas C B, C F.

a 102. hujus.

PROPOSITIO CIV.

PArabolæ A D B, A E B ad eundem axem D E subcontrariè positę, habeant A F B ordinatim positam communem, & per F ducta quævis recta occurrat parabolis in M, K, Y, C.

Dico M F ad K F eandem rationem habere, quam F C ad F Y.



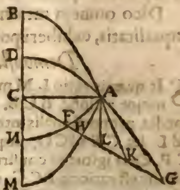
ANgulo A F M fiat æqualis angulus B F X; erit F X æqualis F M, & divisa in R ut F M divisa est in K, cum punctum F, sit ex constructione in axe parabolæ. Ponantur autem ad communem axem ordinatim rectæ C H, Y N, R O, X P: quoniam [a] iterum anguli C F B, A F M, hoc est B F X, æquales sint, erunt C H, B F, R O, & Y N, B F, X P proportionales. Quare rectangula C H R O, X P Y N eidem quadrato B F, adeoque inter se æqualia sunt, igitur C H est ad Y N ut X P ad R O. Sed C H ad Y N est ut C F ad Y F, & X F ad R F est ut X P ad R O, hoc est C H ad Y N igitur C F est ad Y F ut X F ad R F, hoc est M F ad K F. Quod erat demonstrandum.

a 33. lib. 5. tom. 1.

PROPOSITIO CV.

SInt parabolæ binæ ad eandem ordinatim ad axem positam constitutæ A B C, A D C, quibus æquales fiant subcontrariæ ad eundem axem A M C, A N C, & positâ A L, quæ axi æquidistet, ducatur quævis C G:

Dico C F ad C H eandem obtinere rationem, quę est inter lineas C K ad C G.



Demonstratio.

OStensum [a] est lineis C F, C L, C G esse proportionales, uti & C H, C L, C K, igitur rectangula F C G, H C K quadrato C L adeoque inter se æqualia sunt: unde [b] reciprocam habent in lateribus rationem C F ad C H, ut C K ad C G.

a 100. huius.
b 14. sexti.

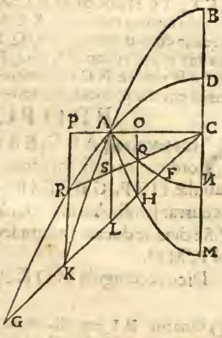
PROPOSITIO CVI.

IIsdem manentibus: ex punctis K & H ponantur axi parallelę H O, K P, quæ occurrant sectionibus in punctis Q & R.

Dico puncta R, Q, C, esse in directum.

Demon-

Demonstratio.



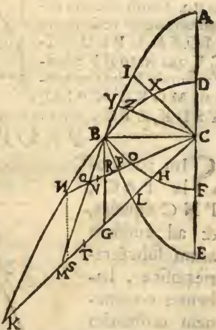
QUoniam [a] ostensum est K C, L C, H C proportionales esse, etiam proportionales sunt P C, A C, O C : & quia parallelę sunt P K, A L, O H, ductâ R C, erunt R C, S C, Q C proportionales. Sed cum R C occurrat sectionibus A D C, A N C in punctis Q & R, & rectam A L in S, etiam proportionales sunt R C, S C, Q C; igitur punctum Q communis est intersectio lineæ R C & H O, & sectionis A N C; quare R, Q, C sunt in directum. Quod demonstrare oportuit. a 100. hujus.

PROPOSITIO CVIJ.

SInt ad communem axem AC, parabolæ A B C, iisque æquales sed subcontrariè positę E B C, F B C & sit communis ordinatim posita B C, axi autem ęquidistet B G, ductaque sit quęvis linea C K occurrens sectionibus in punctis H, L, & M, K, & alia quęvis, inter C K & C B, recta C N occurrens sectionibus in O, P, Q, N.

Dico proportionem rationis K C H ad M C L rationem, majorem esse proportione rationis N C O ad rationem Q C P.

Demonstratio.



SInt primo claritatis ergo, rectæ C H, C L, C G, C M, C K proportionales : erit igitur ratio K C H duplicata tam rationis M C L quam G C H, adeoque ratio M C L æqualis rationi G C H, & C H ad C G ut C L ad C M; Igitur [a] ratio K C H est ad M C L rationem ut K C ad G C. Similiter ostendetur rationem N C O esse ad Q C P rationem ut N C ad C R. Ponatur itaque per N recta N S parallela rectæ B G, patet rationem K C G majorem esse ratione N C R, atque adeo proportionem rationis K C H ad M C L rationem majorem esse proportione rationis N C O ad rationem Q C P. a 14. lib. 5. tom. 2.

Si vero rectæ C H, C L, C G, C M, C K proportionales non sint, fiat ut C L ad C M ita C H ad aliam puta C T, utque C P ad C Q ita C O ad aliam C V : erit [b] ratio K C H ad ad M C L rationem ut K C ad C T, utque N C ad C V ita ratio N C O ad rationem Q C P. Oportet igitur ostendere K C ad C T majorem habere rationem quam N C ad C V, ut constet hujus propositionis veritas. b ibidem.

Fiat angulo K C B æqualis angulus B C I, & angulo N C B æqualis angulus B C Y : Ostensum est [c] rationem I C X majorem esse ratione Y C Z. Quia igitur rationes [d] I C X, K C M, L C H, & Y C Z, N C Q, P C O æquales sunt, erit ratio K C M major ratione N C Q & ratio L C H major ratione P C O. Ulterius ratio K C H composita est ex rationibus K C M, M C L, hoc est T C N ex constructione, & ex ratione L C H; sed etiam composita est ex rationibus c 70. hujus d 92. & 105. hujus

K C T,

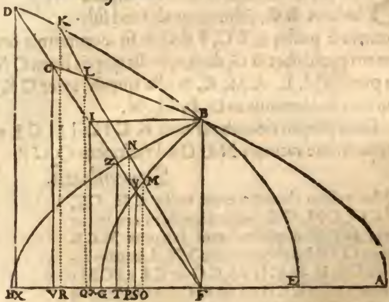
KCT, TCH hoc est MCL: demptâ igitur ratione TCH, manet ratio KCT æqualis duabus rationibus KCM, LCH. Simili discursu ostenditur ratio NCV æqualis duabus rationis NCQ, PCO: cum itaque rationes KCM, LCH majores sint quam rationes NCQ, PCO, ut ostensum est, patet rationem KCT majoré esse ratione NCV, adeoque proportionem rationis KCH ad MCL rationé majorem esse ptoportione rationis NCO ad QCP. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CVIIJ.

Sint parabolç ABC, EBD ad communem axem positæ, habentes BF ordinatim positam eandem, & parabolis ABF, EBF çquales sint parabolæ HBF, GBF sed subcontrariè positæ, ductâque rectâ FD, quæ occurrat parabolis in D, C, Z, Y, ponantur ordinatim DX, CV, ZT, YS: deinde ducatur altera secans FK, & ordinatim ponantur KR, LQ, NP, MO.

Dico rectangula MOKR, NPLQ, YSDX, ZTCV æqualia esse.

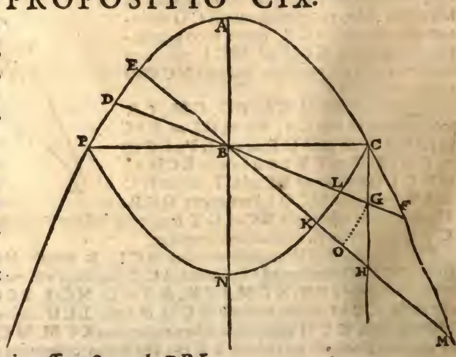
Demonstratio.



Ponatur BI æquidistans axi AH, & IX parallela BF, erunt IX, BF æquales. Per propositionem autem 100. hujus proportionales sunt rectæ FY, FI, FD, igitur etiam sunt proportionales YS, IX, DX, adeoque rectangulum YSDX æquale IX, hoc est BF, quadrato. Simili discursu demonstrantur rectangula MOKR, NPLQ, ZTCV quadrato BF æqualia; unde & ipsa rectangula MOKR, NPLQ, YSDX, ZTCV inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CIX.

Sint parabolæ PAC, PNC æquales, & ad eundem axem subcōtrariè positæ, habentes communem ordinatim PBC, & per B ducantur quçvis secātes EBKM, DBLF, ita ut BF sit inter rectas BM, BC.



Dico rectangulum MBK majus esse rectangulo FBL.

Demon-

Demonstratio.

Ducatur ex puncto intersectionis C recta C H parallela axi A B, quæ secet rectas F B, M B in G, & H, [a] erunt lineæ F B, G B, L B proportionales uti & M B, H B, K B, adeoque [b] quadrato G B æquale F B L rectangulum; quadrato vero H C æquale rectangulum M B K. [c] Cum igitur recta B H major sit rectâ BG, (angulus enim B G H, utpote [d] major angulo B C G, major est [e] angulo B H G) erit quadtatum B H majus B G quadrato, & consequenter rectangulum M B K ipsi B H quadrato æquale, majus rectangulo F B L. Quod fuit demonstrandum. a 100. *hujus.* b 7. *sexti.* c 19. *primi* d 16. *primi* e ex 17. *primi.*

PROPOSITIO CX.

IN axe parabolæ C A D sumatur quodvis punctum B, per quod duæ rectæ transeant in parabola terminatæ, quibus occurrat ex C axi parallela G H in G & H, & fiat B G æqualis B O.

Dico rectangulum M B E excedere rectangulum F A D, rectangulo B O H bis, unà cum quadrato H O.

Demonstratio.

Ponatur C N P parabola, æqualis & subcontrariè posita parabolę C A P, erit E B ipsi B K, & D B ipsi B L ęqualis, & rectangulum M B K, hoc est M B E, [a] æquale quadrato B H; rectangulum vero F B L, hoc est F B D æquale quadrato B G, hoc est B O. Sed [b] quadratum H B superat quadratum O B, rectangulo H O B bis, unà cum quadrato H O, igitur rectangulum M B E excedit rectangulum F B D bis rectangulo B O H, unà cum quadrato H O. Quod erat demonstrandum. a ut patet in demonstrat. præcedenti. b 4. *secundi.*

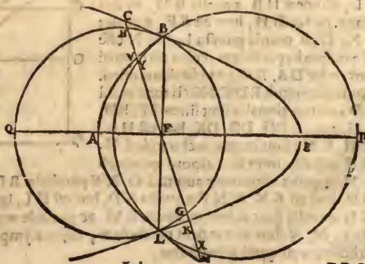
PROPOSITIO CXI.

DUæ parabolæ B E L, B A L ad communem axem subcontrariè positæ, secent sese in B & L, & duo circuli B Q L, B R L pro linea diametrali communem axem habentes, secent sese in ijsdem punctis B, L: demissâque, ex puncto intersectionis B, normali B L ad communem diametrum, ducatur per F quævis linea M F C, quæ & circulos & parabolâs intersecet in C, H, V, Y, G, K, X, M.

Dico rectangulum C K F ad H F G rectangulum, eam habere rationem, quam M V F rectangulum ad rectangulum X F Y.

Demonstratio.

REctangula H F G, X F Y eidem quadrato F B, adeoque inter se æqualia sunt. Sed etiam rectangula C K F, M V F, sunt æqualia, [a] cum C F sit ad V F, ut M F ad F K. Patet igitur rectangulum C K F ad H F G rectangulum eam habere rationem, quam rectangulum M V F ad X F Y rectangulum.



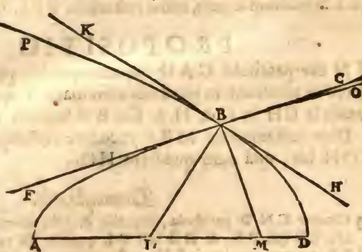
a 104. *hujus.*

PROPOSITIO CXIJ.

DAtis duabus parabolis A B O, D B P ſubcontrariè poſitis, & communem axem habentibus. Oporteat circulos exhibere, qui parabolas illas producant.

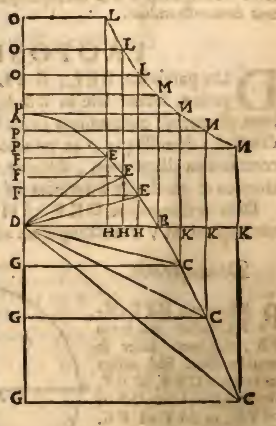
Conſtructio & Demonſtratio.

DUcantur ad commune punctum B, rectæ F B C, H B K tangentes parabolas A B O, D B P, erectiſque ex B ad HB K, F B C perpendicularibus B L, B M, centro L radio L B, & centro M radio M B circuli deſcribantur, erunt hi circuli quæſiti. Vide prop. centeſimam trigeſimam ſecundam lib. quinti tomi primi, vel hic prop. 42.



PROPOSITIO CXIIJ.

OPorteat ex ſectione parabolica hyperbolam, rectos angulos in ſuis aſymptotis continentem, delineare.



Conſtructio & Demonſtratio.

SIt igitur parabola A B C, cujus axis A D, & vertex A, aſſumptoque in axe puncto quodam D, per D ponatur ordinatim D B, quæ biſecet angulos E D C, & ex punctis E & C ordinatim ad axem collocentur rectæ E F, C G, & aliæ lineæ E H, C K ſint axi parallelæ: deinde fiant rectis D K, hoc eſt C G, æquales lineæ H L, & lineæ D B æqualis B M, ac denique rectis D H, hoc eſt E F, æquales K N. Dico omnia puncta L, M, N eſſe ad eandem hyperbolam, cujus aſymptoti ſunt rectæ D A, D K; quod ſic demonſtro. Quoniam anguli E D C biſecti ſunt rectâ B D, [a] proportionales ſunt lineæ E F, B D, C G, hoc eſt D H, D B, D K, hoc eſt H L, B M, K N: ſunt itaque rectangula L H-N K æqualia inter ſe, utpote quadrato B M æqualia: ducantur autem L O, N P parallelæ B D, erunt L O æquales rectis D H, hoc eſt K N, & N P æquales K D, hoc eſt H L, igitur etiam rectangula L D, N D æqualia ſunt eidem quadrata B M, ac proinde æqualia inter ſe: unde [b] puncta L, M, N ſunt ad eandem parabolam, cujus aſymptoti ſunt D A, D K: igitur exhibitum eſt quod quærebatur.

a 33. lib. 5. tom. 1.

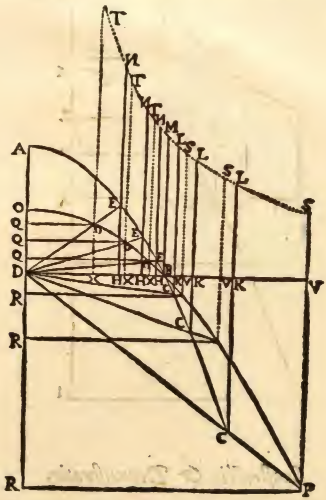
b ex. 98. lib. tom. 2.

PRO-

PROPOSITIO CXIV.

ISdem manentibus: parabolam A B C secet in B parabola O B P, communem habens axem cum parabola A B C.

Dico hyperbolam a parabola O B P genitam, eandem esse cum ea, quæ à parabola A B C producitur, licet diversa puncta assignentur.

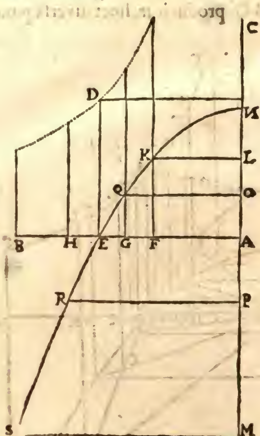


Demonstratio.

PArabola A B C describit hyperbolā per praxim propositione præcedenti explicatam, eo quod rectangula H D K æqualia sint quadrato B D, & consequenter rectangula L D, N D æqualia sint tam inter se quam quadrato D B: cum sint proportionales lineæ H D, B D, K D. Sed etiam proportionales lineæ sunt O Q, B D, P R, hoc est X D, B D, V D cum anguli O D B æquales sint angulis B D P. Igitur etiam rectangula X D V quadrato B D çqualia sunt, ac proinde etiam çqualia rectangulis H D K: si igitur rectis D X çquales fiant V S, & D V æquales X T normales ad B D, erunt rectangula S D, T D æqualia rectangulis X D V, hoc est H D K hoc est L D vel N D, rectangulis: quare unam eandemque hyperbolam exhibent duæ parabolæ A B C & O B P: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXV.

OPorteat ex hyperbola parabolam deſcribere.



Conſtructio & Demonſtratio.

SInt A B, A C aſymptoti hyperbolæ rectæ, ſitque A D quadratum aſymptotis inſcriptum, pertingens ad D verticem hyperbolæ: ſintque proportionales A F, A E, A B, & mediæ inter A B, A E & A E, A F ſint A G, A H, & fiat lineæ A F æqualis linea K L orthogona ad A C ſumpto intervallo A L pro libitu: deinde ut quadratum K L ad ᵃ E A quadratum, ita fiat L A ad A M, inventoque N termino progreſſionis ſeriei M A, A L, erit N L ad N A ut L A ad A M, utque N L ad N A ita N A ad N M. Diviſâ deinde rectâ N M in O & P ut ſint proportionales N L, N O, N A, N P, N M, inter K L & E A media ſit Q O normalis ad N A ex puncto O erecta; & ſeriem K L, Q O, A E continuent P R, M S ſimiliter ex punctis P & M erectæ normaliter ad C A. Dico terminos illarum linearum omnes eſſe ad eandem parabolam & ordinatim poſitas ad parabolam eſſe ęquales lineis in hyperbola erectis ex punctis G, F, E, H, B. Cum enim ex conſtructione rectæ N L, N O, N A, N P, N M ſint in ratione duplicata linearum KL, Q O, E A, R P, S M patet ex elementis conicis puncta N, K, Q, E, R, S eſſe ad eandem parabolam: cum vero recta A F æqualis ſit rectæ K L ſitque Q O media inter A E, K L, hoc eſt F A, inter quæ media quoque eſt G A, patet totam ſeriem proportionalium, toti ſeriei alteri æqualem eſſe.

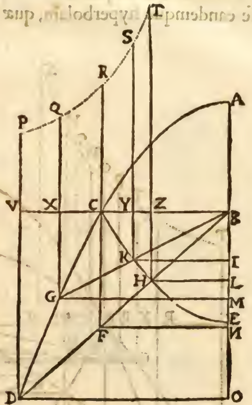
ᵃ 80. & 81. lib. 2. tom. 1.

PRO-

PROPOSITIO CXVI.

SIt A B axis parabolæ A C D, positâque B C ordinatim ad axem, constituatur subcontrariè parabola B C E æqualis A C B, & axi parallela ducatur recta C F: ponantur vero per B quævis B D, B G occurrentes tam parabolis quam rectę C F, & ex punctis intersectionum K, H, G, F, D, ordinatim ad axem applicentur K I, H L, G M, F N, D O.

Oporteat has ordinatim positas ad propriam hyperbolam reducere.



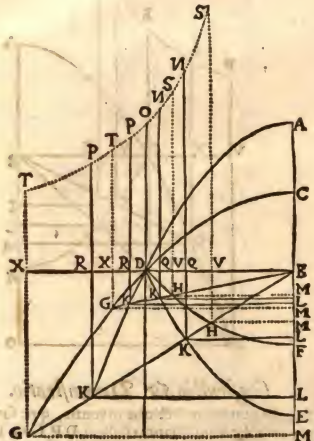
Constructio & Demonstratio.

EDucantur ex singulis punctis in sectione inventis, quæ sunt termini ordinatim positarum, axi parabolæ æquidistantes scilicet D P, G Q, F R, K S, H T occurrentes B C ordinatim ad axem positæ in punctis V, X, C, Y, Z: fiat deinde rectæ D O, hoc est V B, æqualis Z T, & rectæ G M hoc est X B æqualis Y S, & rectæ F N hoc est C B æqualis C F, rectæ vero K I hoc est Y B æqualis X Q, ac denique rectę H L hoc est Z B æqualis V P. Dico omnes illas lineas esse ad eandem hyperbolam. cujus asymptoti sunt B V, B A. Quoniam enim ex constructione lineis B V, B X, B C, B Y, B Z æquales sunt lineæ Z T, Y S, C R, X Q, V P erit ut B N ad B Z ita Z T ad V P, utque B X ad B Y ita Y S ad X Q, adeoque rectangulum Z T-V P, hoc est T Z B, ad rectangulum Y S X Q, hoc est S Y B, ut rectangulum V B Z, hoc est P V B, ad X B Y, hoc est Q X B, rectangulum; quæ rectangula cum inter se æqualia sint (utpote æqualia eidem quadrato C B) erunt quoque rectangula T Z B, S Y B tum inter se tum quadrato R C, æqualia. Cum igitur ex constructione quadrato R C æquale sit C B quadratum, & quadrato C B æqualia rectangula P V B, Q X B, erunt rectangula T Z B, S Y B, Q X B, P V B æqualia inter se & quadrato R C: unde per ea quæ dicta sunt lib. 6. tom. secundo constat puncta P, Q, R, S, T esse ad eandem hyperbolam, cujus asymptoti sunt B V, B A. Fecimus itaque quod requisitum fuit.

PROPOSITIO CXVIJ.

HAbeant binæ parabolæ eandem lineam pro axe, sed diversos vertices scilicet A & C, ad axem autem constituta sit ordinatim B D utrique parabolæ A D B, C D B communis, & sint parabolæ subcontrariè positæ E D B, F D B æquales parabolis A D B, C D B. Ulterius autem per punctum B ductæ sint secantes B G, B H: transferantur autem ad suas hyperbolas eâdem praxi, quâ in præcedenti propositione usi sumus, ordinatim ex punctis inter sectionum ad axem positæ.

Dico unam esse eandemque hyperbolam, quæ per illam constructionem emerget.



Demonstratio.

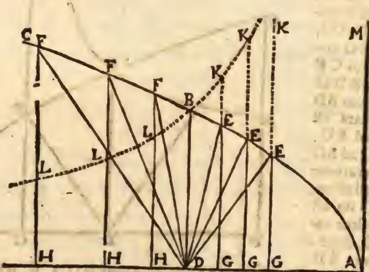
SIt igitur per præcedentem constructionem parabola ADK reducta ad suam hyperbolam N O P, erunt rectæ N Q, P R æquales rectis K L hoc est lineis Q B, R B, & rectangula N B, P B æqualia quadrato O B. Sed etiam rectangula G M-H M, hoc est X B V æqualia sunt quadrato B D, igitur etiam rectangula X B V æqualia sunt rectangulis R B Q, hoc est rectangula S B, T B æqualia N B, P B rectangulis. Quare una & eadem est & hyperbola quæ per puncta S, N, O, P, T transit. Quod fuit demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXVIIJ.

Parabolæ A B C ſit axis A D, & ex quovis puncto axeos D ordinatim ponatur B D, ſecans angulos E D F bifariam, & per puncta E & F ordinatim ducantur, E G, F H: denique fiant proportionales; BD, EG, LH, ita ut prima E G, quæ eſt proxima lineæ B D inter verticem parabolæ & ordinatim poſitam, media ſit inter B D & primam L H, quæ eſt iterum ab altera parte, proxima lineæ B D, & ſic conſequenter: ſimiliter fiat ut B D ad F H, ita F H ad K G.

Dico omnia puncta K, B, L eſſe ad eandem hyperbolam, cujus aſymptoti ſunt A H, A M.



Demonſtratio.

Quoniam ex conſtructione anguli E D B, B D F æquales ſunt, igitur a proportionales ſunt lineæ E G, B D, F H: & quia ex conſtructione etiam L H, E G, B D ſunt proportionales, hinc ſunt quatuor lineæ L H, E G, B D, F H in continua analogia. Quare ratio L H ad B D duplicata eſt rationis B D ad F H: Cum igitur rationis B D ad F H etiam duplicata ſit ratio AD ad AH, manifeſtum eſt rationem A D ad A H æqualem eſſe rationi L H ad B D, unde etiam rectangulum A D B æquale eſt rectangulo A H L; patet itaque omnia puncta B, L, L eſſe ad eandem hyperbolam: hic diſcurſus cum ſit communis rectangulis K G A, B D A etiam K, K, B puncta ſunt ad eandem hyperbolam.

a 32. 33. l. 5 tom. 1.

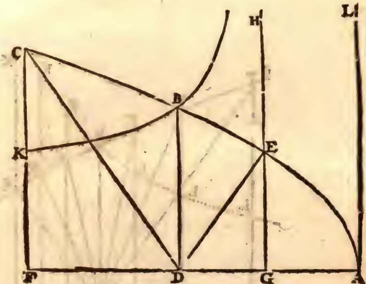
PRO-

PROPOSITIO CXIX.

SIt parabola A B C, cujus axem A D secet ordinatim D B, & ductâ quâvis D C, descripta sit per B hyperbola inter asymptotos AL, AD, fiatque angulo C D B æqualis angulus B D E, & per puncta C & E ponantur ordinatim C F, H G, quæ occurrant hyperbolæ in punctis H, K.

Dico tam C F mediam proportionalem esse inter rectas H G, B D, quam rectam E G mediam inter lineas B D, K F.

Demonstratio.



QUoniam angulum E D C bisecat recta B D, [a] proportionales sunt C F, B D, E G, & ratio C F ad E G duplicata est rationis C F ad B D, hoc est B D ad E G. Ratio autem AD ad A G duplicata est rationis B D ad E G, igitur ratio AD ad AG eadem est cum ratione C F ad E G. Sed etiam ut A D ad A G ita est H G ad B D, igitur ratio H G ad B D, duplicata est rationis B D ad E G, hoc est C F ad B D; unde proportionales sunt H G, C F, B D. Simili discursu proportionales ostenduntur B D, E G, K F. Quod fuit demonstrandum.

a 32. & 32. lib. 5. tom. 1.

LIBER

LIBER SEXTUS
DE
Proprietatibus Hyperbolicis.

ARGUMENTUM.

Continet hic liber partes tres.

Prima rationes cum ipsis hyperbolicis segmentis, lineisque proportionalibus confert: ex qua comparatione pulcherrima prodit rationum proportionalium proprietas, omnino ad Mesolabii solutionẽ necessaria.

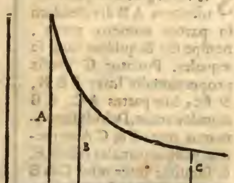
Secunda vero præmissis rationibus æqualibus beneficio hyperbolæ inventis, inquirit quandonam quibusve lineis ratio, in hyperbola constituta, dividi queat in duas rationes, quæ inter se habeant rationem datam. Dein distantias rationum ab invicem in segmento hyperbolico; rationes in invicem ductas, variasque compositiones rationis majoris aut minoris inæqualitatis considerat.

Tertiâ denique inquirit quandonam segmentum hyperbolicum semel sectum iterum queat dividi, ut exurgant tres rationes proportionales, dein aliquas rationum series, secundum datos denominatores expendit.

PARS PRIMA.
Comparantur rationes cum segmentis hyperbolicis, lineisque proportionalibus.

PROPOSITIO I.

QUoties tres lineas proportionales, asymptoto parallelas, in hyperbola constitutas invenies, toties ipsum segmentum, ex prima & tertia emergens, per mediam lineam bisectum advertes.



Demonstratio.

SInt proportionales A, B, C, in hyperbola asymptoto parallelæ, erit ratio A C duplicata A B rationis. Sed [a] quam est ratio A C multiplicata rationis A B, tam segmentum A C est multiplex segmenti A B. Cum itaque ratio A C duplicata sit rationis A B, erit segmentum A C duplex segmenti A B; adeoque segmentum A C bisectum est per rectam B. Quod fuit demonstrandum.

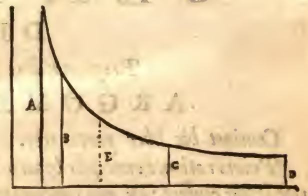
[a] 125. & sequentibus lib. 6. tom. 1.

PRO-

PROPOSITIO IJ.

SInt in hyperbola rationes A B, & C D æquales: Dico A B, C D ſegmenta eſſe æqualia,

Demonſtratio.



FIat rationi C D æqualis ratio B E, erunt rationes A B, B E æquales, & ratio A E duplicata tam rationis A B, quam B E, hoc eſt C D. Sed [a] quam eſt multiplicata ratio A E rationis CD vel A B, tam eſt multiplex ſegmentum A E ſegmenti C D vel A B; cum igitur ratio AE tam ſit duplicata rationis C D quam AB, tam erit ſegmentum A E duplum ſegmenti C D quam A B; ſegmentum itaque C D ipſi A B ſegmento æquale eſt.

a 123. *lib.* 6. *tom.* 2.

PROPOSITIO IIJ.

SIt ſegmentum A B æquale C D ſegmento: Dico rationes A B, C D æquales eſſe.

Demonſtratio.

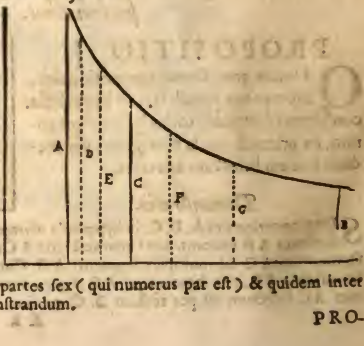
FIat rationi C D æqualis ratio BE, [a] erit ſegmentum BE æquale C D ſegmento, & conſequenter æquale ſegmento A B, igitur cum ſegmentum A E duplum ſit ſegmenti B E, hoc eſt A B, erit ratio A E duplicata tam rationis A B, quam B E, quare æquales ſunt rationes A B, B E, hoc eſt C D.

a *per præcedentem.*

PROPOSITIO IV.

OMne ſegmentum hyperbolicum dividi poteſt in tot partes numero pares & inter ſe æquales, quot datus aliquis numerus complectitur, qui partibus numero paribus conſtat.

Demonſtratio.



SIt verbi gratia aliquod ſegmentum A B dividendum in partes numero pares, nempe ſex & quidem inter ſe æquales. Ponatur C media proportionalis inter A & B, & ſic [a] duæ partes A C, C B æquales erunt. Deinde ſupponamus inter A & C duas medias proportionales eſſe D, E, & ſimiliter inter inter C & B medias eſſe F & G; erunt iterum [b] ſegmenta A D, D E, E C, & CF, F G, G B, æqualia. Igitur manifeſtum eſt ſegmentum A B dividi poſſe in partes ſex (qui numerus par eſt) & quidem inter ſe æquales: Quod fuit demonſtrandum.

a 1. *hujus.*

b 109. & *ſequentib. lib.* 6. *tom.* 2.

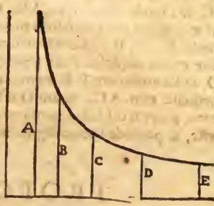
PRO-

PROPOSITIO V.

SI ſegmentum aliquod Hyperbolicum diviſum fuerit, in partes æquales:

Dico linearum numerum & ſegmentorum, ſeu partium, denique numerum linearum mediarum, intra extremas collocatarum, eſſe in Arithmetica analogia.

Demonſtratio.

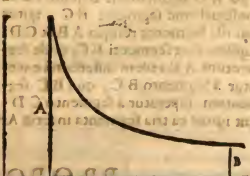


SInt A, B, C, D, E lineæ, termini ſegmentorum, in quæ eſt diviſum totum A E ſegmentum; Igitur cum ponantur quinque numero lineæ, erunt A B, B C, C D, D E, quatuor partes illis lineis terminatæ, numerus autem mediorum terminorum, ſi tollantur extremi, remanet ternarius; igitur ſunt medii termini, & partes ſegmenti A E, cum omnibus lineis in diviſione repertis, in ſerie progreſſionis Arithmeticæ; Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

OMne ſegmentum Hyperbolicum dividi poteſt in ſegmenta impari numero, ſecundum quemvis numerum datum, qui imparis numeri partes continet.

Demonſtratio.



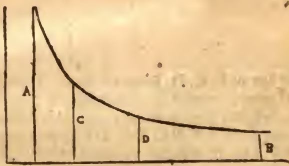
DAtum eſto A B ſegmentum dividendum in ſegmenta æqualia, numero impari, videlicet in ſeptem partes. Quoniam A B ſegmentum ſi fuerit diviſum in ſeptem partes æquales, per lineas aſymptoto parallelas, debet conſtare [a] linearum numero, & partium ſegmenti numero, denique rectarum numero, excluſis extremis, quæ ſint in Arithmeticæ progreſſionis ſerie: igitur cum ſegmentorum ſeu partium ſegmenti A B, numerus ſupponatur impar, debebit numerus linearum omnium eſſe par, numerus illarum erit octo, & numerus rectarum, quæ intermediæ ſunt inter A & B extremas, etiam par erit: unde ſi inter terminos A & B ſex mediæ proportionales aſſignatæ fuerint, prodibit numerus partium ſegmenti ſeptem; quare etiam quodlibet ſegmentum hyperbolicum dividi poteſt, ut exhibeatur numerus æqualis cuicumque numero impari. Quod fuit demonſtrandum.

[a] *per præcedentem.*

PROPOSITIO VIJ.

QUod si A B segmentum per rectas C & D, asymptoto parallelas, divisum fuerit, quæ cum extremis sint in continua analogia:
Dico totum A B segmentum triplum esse segmenti medii C D.

Demonstratio.



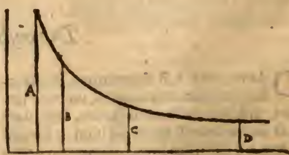
QUoniam supponuntur omnes lineæ A, C, D, B esse proportionales, igitur etiam proportionales sunt A, C, D; igitur [a] segmenta A C, C D sunt æqualia; atqui etiam sunt proportionales C, D, B, ex constructione, igitur etiam æqualia sunt segmenta C D, D B; unde cum C B segmentum sit æquale tam A C, quam D B segmento, patet tria illa segmenta æqualia esse, ac proinde totum segmentum A B triplum esse segmenti C D.

a 1. *hujus.*

PROPOSITIO VIIJ.

SI segmentum A D triplum fuerit segmenti B C:
Dico segmenta A B, B C, C D esse in serie progressionis Arithmeticæ.

Demonstratio.



SUpponatur primò segmentum A B minus esse segmento B C, quoniam ergo A D segmentum triplum est ex constructione segmenti B C, igitur duo illa segmenta reliqua A B & C D, duplicia sunt segmenti B C; unde segmentum A B eâdem differentiâ exceditur à segmento B C, quo B C segmentum superatur à segmento C D: sunt igitur ea tria segmenta in serie Arithmeticæ progressionis.

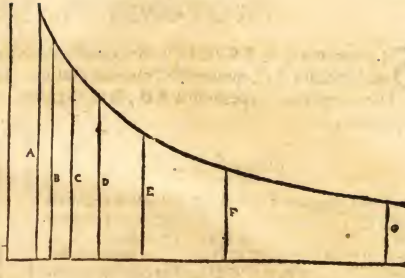
PROPOSITIO IX.

DIvisum intelligatur segmentum aliquod hyperbolicum in seriem Arithmeticam:
Dico primum segmentum cum ultimo, æquale esse secundo cum penultimo, atque ita deinceps, si numerus par fuerit segmentorum.

PRO-

Demonstratio.

OMni seriei Arithmeticæ proprium est, ut primus terminus cum ultimo æqualis sit secundo addito penultimo, & sic deinceps; ergo etiam seriei segmentorum hyperbolicorum, quæ secundum progressionem Arithmeticam est cõstituta.



Corollarium.

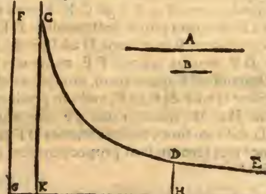
QUod propositio affirmat de serie Arithmetica, in casu, quo partium segmenti numerus par fuerit, etiam intelligendum est, de quovis numero impari, modo medius terminus bis sumatur: Quod etiam seriei quantitatis discretæ commune est.

PROPOSITIO X.

DAtam rationem in Hyperbola constituere, per lineas Asymptoto parallelas.

Constructio & Demonstratio.

DAta sit quævis ratio A B, & Hyperbola C D E inter asymptotos F G, G H constituta: petitur aliqua methodus Geometrica constituendi duas lineas asymptoto F G parallelas, quarum ratio sit æqualis A B Priusquam ulterius in hac parte progrediamur monendus est lector, quod in posterum non utemur aliâ hyperbolâ, præter illam cujus asymptoti conjugatarum hyperbolarum constituunt rectum angulum, non quod



aliorum angulorum hyperbolæ minus aptæ sint ad præstandum ea, quæ propositionibus continentur, cum omnes hyperbolæ iisdem gaudeant proprietatibus, sed ad firmandam universaliter imaginationem, nè varietate angulorum turbationem passa, minus sit apta ad ea percipienda, quæ proprietatibus continentur. Sit itaque C D E hyperbola, cujus asymptoti angulum rectum constituant; Oporteat itaque in illa exhibere duas rectas asymptoto æquidistantes, quæ sint in ratione A ad B. Fiat ut A ad B ita G H, ad G K, ex punctis autem H & K erigantur asymptoto parallelę H D, K C, quoniam ex natura hyperbolæ [a] rectangula G K C, & G H D æqualia sunt, igitur [b] sicut G K ad G H, ita est H D ad K C; sed G H ad G K est ut A ad B, igitur etiam K C ad H D est ut A ad B. Factum igitur est quod fuit imperatum.

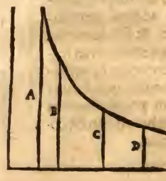
a 46. lib. 6. tom. 2.
b 16. sexti.

 PRO-

PROPOSITIO XI.

SI segmenta A B, B C, C D ita sint constituta, ut ratio A B toties sit multiplicata B C, quoties B C ratio est multiplicata C D:

Dico segmenta hyperbolica A B, B C, C D esse in continua analogia Geometrica.



Demonstratio.

a *ex 125. & sequent. lib. 6. tom. 2.* QUando ratio A B [a] toties est multiplicata rationis B C, quoties B C ratio est multiplicata rationis C B, tunc segmentum A B tam est multiplex B C, quam B C est multiplex C D; ergo sunt æque multiplicia segmenta A B, B C, C D & [b] per consequens in continua analogia.

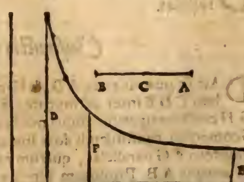
b *ex def. 6. & 7. quinti.*

PROPOSITIO XII.

SIt A B recta bisecta in C, segmentum quoque hyperbolicum D E dividatur per F, ut ratio D F ad F E sit æqualis rationi A C ad C B:

Dico lineas D, F, E proportionales esse.

Demonstratio.



QUoniam segmentum D E sectum est per F, ut sit ratio D F ad F E ut A C ad C B, ex constructione, igitur [a] rectangulum D E ad F quadratum est ut A C ad C B, hoc est sicut D ad D: sed non potest rectangulum D E esse ad quadratum F in ratione D ad D, nisi sit ratio D F æqualis rationi F E, nam ratio D E rectanguli ad F quadratum, composita est ex ratione D ad F & E ad F, unde, ut producatur ratio D ad D, debet ratio E F esse æqualis F D, sed cum sunt equales rationes D F & F E tunc [b] tres termini sunt proportionales; igitur patet lineas D, F, E proportionales esse.

a *33. & 34. lib. 1. tom. hujus.*

b *4. defin.*

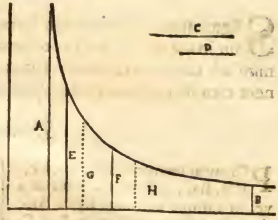
PROPOSITIO XIIJ.

SEgmentum Hyperbolicum claudatur duobus terminis asymptoto parallelis, & horum rationis pars tertia, in duobus terminis quovis loco constituatur:

Dico quod totum segmentum medii segmenti sit triplum.

Demonſtratio.

EXponatur aliquod ſegmentum hyperbolicum A B, cujus extremorum terminorum ratio A B ſit triplicata rationis C D, & conſtituatur, quâuis aſſumptâ lineâ in ſegmento A B nimirum E, ratio E F, æqualis rationi C D: Dico ſegmentum A B fore triplum ſegmenti E F, quod ſic demonſtro. Fiat rationi C D æqualis ratio A G, & ſimiliter rationi A G æqualis G H, erit ratio H B æqualis rationi A G vel G H, quoniam ratio A B ſupponitur triplicata C D, hoc eſt A G vel G H; erunt igitur proportionales lineæ A, G, H, B: unde [a] erit ſegmentum A B triplum ſegmenti G H vel A G vel H B; quia vero E ad F eſt ut G ad H ex conſtructione, erit permutando E ad G ut F ad H, unde ſegmentum E G, [b] æquale eſt ſegmento F H. Igitur ſi commune addatur ſegmentum G F utrique ſegmento E G, & F H, erit ſegmentum E F æquale G H, & conſequenter tertiæ parti ſegmenti A B. Quod demonſtrandum fuit.



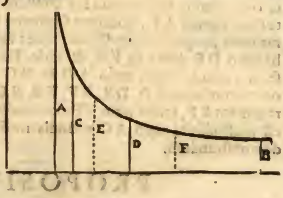
a 7. *hujus.*
b 2. *hujus.*

PROPOSITIO XIV.

IN ſegmento A B ſumatur C D pars tertia, per rectas aſymptoto parallelas, quocumque tandem loco in toto ſegmento: Dico rationes A C, C D, D B, proportionales eſſe.

Demonſtratio.

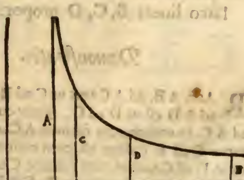
QUoniam ex conſtructione ſegmentum A B, eſt triplum ſegmenti C D, igitur [a] ratio A B triplicata eſt rationis C D. Sed ratio A B componitur ex rationibus A C, C D, D B; adeoque ablatâ ratione C D, cujus A B eſt triplicata, manet ratio A C ducta in D B duplicata rationis C D, ſive æqualis rationi C D ductæ in ſe: & conſequenter patet rationes A C, C D, D B proportionales eſſe. Quod fuit demonſtrandum.



a 125. *lib. 6. tom. 2.*
b 2. *hujus.*

Corollarium.

UNde ſequitur quotieſcumque aliquod ſegmentum hyperbolicum, ſcilicet A B diviſum eſt taliter, ut lineæ C D aſymptoto parallelæ contineant aliquam ſegmenti partem, quæ tertiæ parti toties ſegmenti ſit æqualis, ſive illa pars conſtituatur, hoc vel illo loco in ſegmento, ſemper prodire tres rationes proportionales A C, C D, D B: & contra, quoties rationes A C, C D, DB proportionales ſunt, toties etiam ſegmentum A B triplum ſegmenti C D futurum.

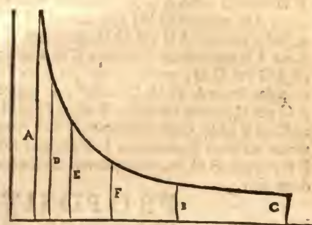


PRO-

PROPOSITIO XV.

SEgmentum hyperbolicum in partes æquales impari numero divisum, aut in inæquales, sed in proportione Arithmetica, exhibet, primi termini ad ultimum rationem, toties multiplicatam rationis, quam continent termini rationis medię, quot sunt partes rationis seriei.

Demonstratio.



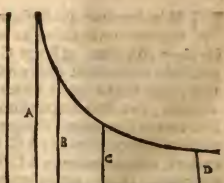
POnantur segmenta AD, DE, EF, F B, B C, vel æqualia inter se, vel in ratione continua seriei Arithmeticę: Dico quod ratio A ad C primi termini ad ultimum, toties sit multiplicata rationis terminorum, qui medium segmentum continent, scilicet E ad F; quoties totum segmentum A C divisum est; Quod sic demonstro: Duplex est casus hujus propositionis, primus qui supponit segmentum A C divisum esse in segmenta seu partes inter se ęquales, & sic cum supponatur segmentum A C divisum esse in quinque æquales partes, non est mirum quod ratio A C sit quintuplicata E F. Secundus autem est casus qui supponit quidem segmentum A C in partes quinas divisum, sed omnes inæquales inter se. Ad hujus casus veritatem demonstrandum necessarium est, ut ostendamus segmentum E F constare terminis, quorum ratio sit quinta pars totius rationis A G. Quoniam segmenta sunt Arithmeticè proportionalia, [a] erunt rationes proportionales Geometricè: Igitur rationi A D ductæ in B C est æqualis ratio DE ducta in FB, & ratio DE in F B æqualis est rationi EF ductæ in se, ac proinde etiam ratio A D in B C æqualis rationi E F ductæ in se; unde omnes rationes A D, DE, E F, F B, B C in se ductæ, exhibent quintuplicatam rationem E F, igitur ratio E F est æqualis quintæ parti rationis A C; igitur toties est multiplicata ratio A C rationis mediæ, quoties A C divisum est. Quod fuit demonstrandum.

a 14. hujus.

PROPOSITIO XVI.

SI rationes A B, A C, A D proportionales fuerint in segmento Hyperbolico:

Dico lineas B, C, D proportionales esse.



Demonstratio.

RAtio A B, ad A C [a] est ut C ad B, & ratio A C ad A D est ut D ad C, igitur cum ratio A B ad A C sit eadem cum ratione A C ad A D, etiam ratio C ad B eadem est cum ratione D ad C, & ratio D ad C eadem cum ratione C ad B; proportionales itaque sunt lineæ B, C & D.

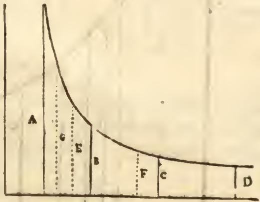
a Tom. 2. lib. 8. prop. 7.

PROPOSITIO XVII.

OMnes tres rationes proportionales æquali rationis intervallo discrepant.

Demonstratio.

SIt series rationum A B, B C, C D proportionalium, quarum, prima A B sit maxima trium, & fiat rationi C B æqualis B E, igitur cum sint ex constructione proportionales rationes A B, B C, C D, etiam erunt proportionales A B, G B, E B. Et consequenter, per præcedentem propositionem, proportionales erunt lineæ A, G, E, igitur [a] segmentum A G æquale est segmento G E, igitur etiam [b] ratio A G est æqualis rationi G E: ergo patet tres rationes A B, B C, C D, æquali rationis intervallo differre.



a 108. lib. 6. tom. 2.
b 3. hujus.

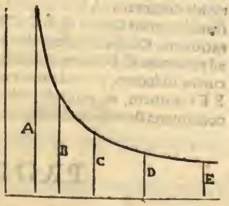
PROPOSITIO XVIIJ.

SInt A B, & B C, C D, D E rationes proportionales, quovis numero complentes rationem, quæ est inter A, E terminos segmenti Hyperbolici:

Dico partes segmenti A, E continere serim progressionis Arithmeticæ.

Demonstratio.

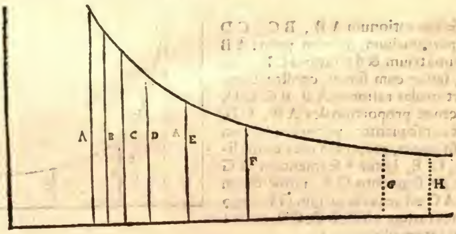
QUoniam rationes sunt Geometricè proportionales [a] igitur sese invicem superant æquali rationis intervallo, igitur sunt rationes æquales, quibus inter se differunt omnes illius seriei rationes: [b] verum æquales rationes æqualia continent segmenta; igitur segmenta, quorum termini exhibent seriem Geometricam, sese invicem excedunt eodem segmenti excessu, quare rectè perhibentur in serie Arithmetica contineri. Quod fuit demonstrandum.



a 17. hujus.
b 2. hujus.

PROPOSITIO XIX.

OMne ſegmentum hyperbolicum in partes diviſum, quæ ſunt in progreſsione quantitatis diſcretæ, exhibet rationes linearum in ſerie geometricę proportionis conſiſtentes.



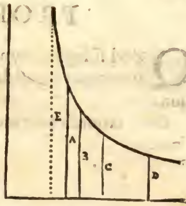
Demonſtratio.

SInt igitur in Arithmetica ratione omnes partes A B, B C, D E & E F ſegmenti A F: Dico rationes A B, B C, C D, D E, E F eſſe in continua ſerie geometricæ progreſsionis. Quod ſic demonſtro. Quoniam ſegmentum A B ſuperat B C ſegmentum eâdem differentiâ, quâ ſegmentum B C excedit C D ſegmentum, igitur æqualia ſunt ſegmenta, ſeu differentiæ, quibus diſtant inter ſe ſegmenta A B, B C, C D: ponatur autem differentia ſegmentorum æqualis ſegmento G H, igitur A B ſegmentum, ſuperat B C ſegmentum G H ſegmento, quo ſimiliter ſegmento excedit ſegmentum B C ſegmentum C D, quare cum ſint ſegmentorum differentiæ æquales, etiam rationes differentiarum, quas lineæ ſegmentorum inter ſe ſervant, æquales erunt. Æquali igitur differentiâ rationis diſtat ratio A B à ratione B C, quâ diſtat ratio B C à ratione C D; proportionales igitur ſunt A B, B C, C D rationes: nam A B eſt ad B C ſicut B C ad C D rationem. Cum vero idem diſcurſus natus ſit inferre, quod ſimiliter ratio B C ſit ad rationem C D, quemadmodum C D eſt ad rationem D E, erit quoque idem diſcurſus inducens, ut credamus rationem quoque C D ad D E eſſe ut eſt ratio D E ad E F rationem, ac proinde, omnes illas rationes A B, B C, C D, D E, E F eſſe in continuata ſerie Geometrica ejuſdem rationis. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

SInt æqualia ſegmenta A B, B C, C D & poſita quævis E:
Dico rationes E A, E B, E C, E D eſſe in continua analogia geometrica.

Demonstratio.



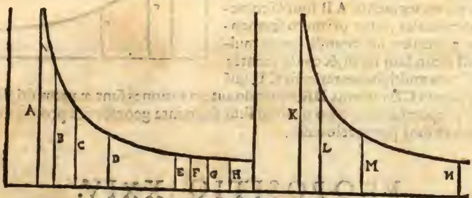
QUoniam segmenta A B, B C, C D æqualia sunt ex constructione, ideo [a] rationes A B, B C, C D æquales sunt inter se; unde cum ratio E A deficiat intervallo rationis A B à ratione E B, quo etiam ratio E B deficit à ratione E C, & ratio E C à ratione E D, hinc omnes illæ rationes E A, E B, E C, E D æquali rationis intervallo ab invicem discrepant, igitur [b] proportionales sunt eædem rationes: Quod fuit demonstrandum.

a 1. hujus
b 17. hujus

PROPOSITIO XXI.

SUpponantur segmenta A B, B C, C D inter se esse æqualia, sicut & segmenta E F, F G, G H, deinde fiat segmento A B æquale K L segmentum, segmentis quoque B C, E F æquale L M segmentum, denique segmentis C D, F H æquale segmentum M N:

Dico rationes K L, L M, M N proportionales esse.



Demonstratio.

SEgmentum C D cum segmento F H superat segmentum B C, unà cum segmento E F, segmento E F: sed etiam segmentum B C unà cum E F, superat A B segmentum eodem segmento E F, igitur segmenta C D cum F H, hoc est ex constructione, segmentum M N superat segmenta B C, E F, hoc est segmentum L M, sicut segmentum L M superat ipsum K L segmentum: unde proportionalia Arithmeticè sunt segmenta K L, L M, M N, adeoque [a] rationes terminorum Geometricè sunt proportionales: Quod fuit demonstrandum.

a 19. hujus.

PROPOSITIO XXII.

SI segmentis Hyperbolicis, in serie Arithmetica constitutis addantur singulis æqualia segmenta:

Dico quod resultabit series rationum in Geometrica progressione ordinata.

Demonstratio.

SI [a] in serie numerorum Arithmeticè proportionalium, à singulis æquales partes tollantur, vel iisdem addantur, remanet series Arithmetica: Cum igitur series partium alicujus segmenti Hyperbolici supponatur esse in Arithmetica progressione, servabit etiam seriem Arithmeticam, si singulis partibus æqualia segmenta addantur, vel ab iisdem demantur. Ergo rationes terminorum servabunt etiam progressionem seriei Geometricæ: Quod erat ostendendum.

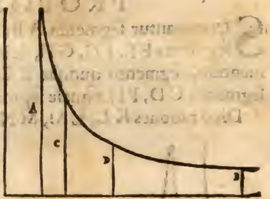
a 19. & 20 lib. 1. hujus.

PROPOSITIO XXIIJ.

Quod si segmentum A B hyperbolicum per aliquas rectas C, D, asymptoto parallelas divisum fuerit, in partes Geometricè proportionales:

Dico rationes terminorum A, C, D, B, non fore Geometricè proportionales.

Demonstratio.



Docuimus tom. 1. libro de hyperb: quando in hyperbola segmenta sunt ita disposita, ut primum segmentum tam sit multiplex secundi, quam est multiplex secundum tertii, quod in illo casu sit tam multiplicata ratio A C rationis C D, quam est multiplicata ratio C D rationis D B. Sed quando partes segmenti A B sunt Geometricè proportionales, tunc primum segmentum tam multiplex est secundi, quam multiplex est secundum tertii, & consequenter ratio AC tam multiplicata rationis C D quã est multiplicata CD rationis DB;[a] quando autem rationes sunt æquemultiplicatæ, non sunt proportionales, ergo quando sunt segmenta geometricè proportionalia rationes non sunt proportionales.

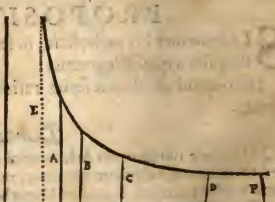
a 53. *lib.* 1. *tom. hujus*

PROPOSITIO XXIV.

Sint A, B, C, D lineæ proportionales in segmento Hyperbolico, & ponatur quævis E ante lineam A:

Dico segmenta E A, E B, E C, E D esse in serie progressionis Arithmeticæ.

Demonstratio.



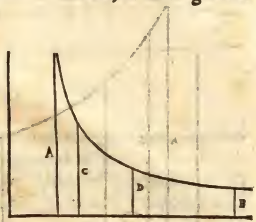
Segmentum E B superat segmentum E A segmento A B, similiter segmentum E C excedit segmentum E B segmento B C; est autem [a] A B segmentum æquale B C segmento, cum lineæ A, B, C, sint ex constructione proportionales, igitur sunt in serie Arithmetica segmenta E A, E B, E C; quod cum etiam conveniat E B, E C, E D segmentis, patet omnia illa segmenta E A, E B, E C, E D in serie progressionis Arithmeticæ constituta esse.

a 1. *hujus.*

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Segmentum A B Hyperbolicum, sectum sit per C lineam asymptoto parallelam, ut segmentum A C minus sit tertia parte segmenti A B: Oporteat illud dividere denuo per aliam D lineam, ut sint segmenta A C, C D, D B D in serie Arithmetica.



Constructio & Demonstratio.

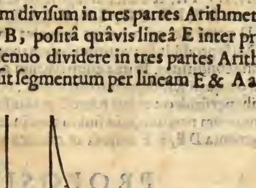
POnatur recta D ut C D segmentum æquale sit tertiæ parti segmenti A B, eritque factum quod requiritur. Cum enim C D segmentum æquale sit tertiæ parti segmenti A B, igitur A C, D B segmenta æqualia sunt duplo segmenti CD, igitur BD segmentum superat D C segmentum, sicut D C segmentum superat segméntum C A: igitur sunt A C, C D, D B in serie quantitatis discretæ.

Scholion.

PRopositio hæc problematis quidem habet speciem, cum natura sua videatur potius theorematicè proponenda, quemadmodum si diceretur: segmentum A B sectum per C exhibens partem A C minorem tertia parte segmenti A B, si dividatur in D ut C D sit æqualis tertiæ parti segmenti A B, erunt A C. C D, DB segmenta in serie Arithmeticæ: quare potius theorematis normâ postulat hæc propositio enuntiari, quia hucusque medium ratio reperta est, praxi geometricâ exhibendi dati segmenti tertiam partem, eo quod eâdem methodo prodiret notitia duas medias, inter duas datas lineas, inveniendi. Nihilominus sive modo problematis vel theorematis proponatur, eadem notitia emergit proprietatis, quam intendimus insinuare, qua perhibetur necessariam esse praxim qua tertia pars segmenti inveniatur, ad dividendum segmentum secundum seriem Arithmeticam, quæ praxis prorsus necessaria est, non ad duas solum medias, sed ad omnes medietates exhibendas.

PROPOSITIO XXVJ.

DAtum segmentum Hyperbolicum divisum in tres partes Arithmeticæ proportionales A C, C D, D B, positâ quâvis lineâ E inter primam & secundam lineam, oporteat denuo dividere in tres partes Arithmeticè proportionales, ut pars prima sit segmentum per lineam E & A assignatum.

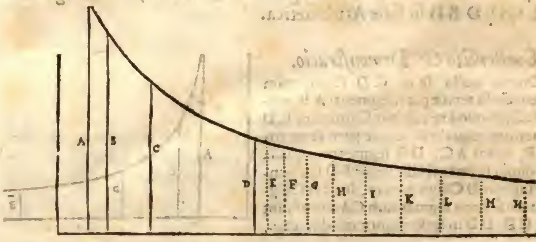


Demonstratio.

FIat rationi C D æqualis ratio E F: Dico factum quod postulatur: nam E F segmentum equale est segmento CD, est autem segmentum C D æquale tertiæ parti ex constructione: igitur etiam segmentum E F, quare segmentum A E, F B duplicia sunt segmenti E F ac proinde sunt in serie Arithmetica segmenta A E, E F, F B.

PROPOSITIO XXVIJ.

Oporteat exhibere aliquod ſegmentum hyperbolicum conſtans numero partium impari.



Conſtructio & Demonſtratio.

Datus ſit verbi gratia numerus partium novennarius, & aſſumantur decem lineæ in continua ſerie proportionales, quæ omnes conſtituantur in hyperbola parallelæ aſymptoto: intelligantur A, B, C, D eſſe in continua analogia, & quævis illarum partium diviſa in tres, per lineas quæ ſint ſimiliter in continua ſerie, ita ut decem lineæ proportionales compleant totam ſeriem A D, igitur ſegmenti A D partes erunt novem numero, & quidem inter ſe æquales: hoc facto ſumatur ſeries ſegmentorum æqualium D E, E F, F G, G H, H I, I K, K L, L M, M N &c, & ſecundę parti, ſegmenti A B diviſi in tres partes æquales, addatur ſegmentum D E; deinde tertiæ parti ejuſdem ſegmenti adjungantur duo ſegmenta D E & E F. Primæ parti ſegmenti B C, addantur tria ſegmenta D E, E F, F G; & ſecundæ parti ejuſdem ſegmenti accedant quatuor ſegmenta D E, E F, F G, G H; tertiæ deinde parti B C addantur quinque ſegmenta D E, E F, F G, G H, H I. Ulterius primæ parti ſegmenti C D apponantur ſex ſegmenta D E, E F, F G, G H, H I, I K; & ejuſdem ſegmenti C D parti ſecundæ adjungantur ſeptem ſegmenta D E, E F, F G, G H, H I, I K, K L; deinde tertiæ parti ejuſdem ſegmenti C D accedant octo partes æquales, nempe D E, E F, F G, G H, H I, I K, K L, L M; & prodibit ſegmentum habens partes novem in Arithmeticæ ſeriei progreſſione conſtitutas. Prima enim illarum novem partium ſolitaria ſumpta eſt, reliquæ vero æquali ſeſe ſegmento excedunt, ut ex ipſa conſtructione liquere ſufficienter mihi perſuadeo: atque hæc eſt praxis formandi quemvis numerum in Hyperbola aliquarum partium, quæ ſint in continua progreſſione Arithmetica, nec refert an ſegmenta D E, E F majora an minora aſſumantur: modo æqualia ſint.

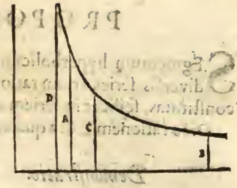
PROPOSITIO XXVIIJ.

Sit ſegmenti A B pars A C minor tertia parte, deinde fiat C D ſegmentum æquale tertiæ parti ejuſdem ſegmenti A B:

Dico rationes A D, D C, C B eſſe proportionales.

Demon-

Demonstratio.



Ratio A B [a] composita est ex ratione A ad D, & D ad C, & C ad B. Est autem ratio A B triplicata D C, ex constructione; igitur ratio A D in C B est duplicata D C: unde ratio D C in se ducta æqualis est rationi A D ductæ in C B. Sunt igitur proportionales rationes A D, D C, C B cum prima ducta in tertiam æqualis sit secundæ ductæ in se.

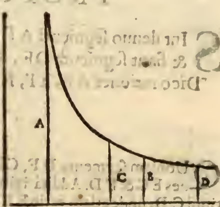
a 62. lib. 1. tom. hujus.

PROPOSITIO XXIX.

Sit segmenti A B pars C B minor tertia parte A B; sit autem segmentum C D æquale tertiæ parti ejusdem segmenti A B:

Dico rationes A D, D C, C B æquales quidem esse rationibus A C, C D, D B, nullatenus tamen esse proportionales sicut sunt rationes A C, C D, D B.

Demonstratio.



Quod proportionales sint rationes A C, C D, D B constat ex eo quod ratio A B [a] composita sit ex ratione A C, & C D, & D B. Est autem ratio A B triplicata rationis C D, ex constructione; igitur ratio A C ducta in D B duplicata est rationis C D, unde liquet tres illas rationes esse proportionales, eo quod media in se ducta æqualis sit reliquis duabus in se multiplicatis. Superest ut ostendamus rationes A D, D C, C B æquales esse rationibus A C, C D, D B, nec tamen proportionales esse. [b] Ratio A B etiam est composita ex rationibus A D, D C, C B, igitur tam rationes A D, D C, C B, quam rationes A C, C D, D B æquales sunt rationi A B. Si autem rationes A D, D C, C B proportionales essent, etiam ratio D C in se ducta æqualis esset rationi A D ductæ in C B. Igitur ratio majoris inæqualitatis, esset æqualis rationi minoris inæqualitatis, cumque hoc fieri nequeat, patet illas rationes non esse proportionales.

a 62. lib. 1. tom. hujus.

b Ibidem.

PROPOSITIO XXX.

Iisdem manentibus: Dico nihilominus rationes A D, A C proportionales esse cum rationibus C B, D B.

Demonstratio.

Ratio A D in D B ducta producit rationem A B, sed eandem quoque exhibet ratio A C ducta in C B, igitur [a] rationes A D, A C, proportionales sunt cum rationibus C B, D B.

a ex 16. sexti.

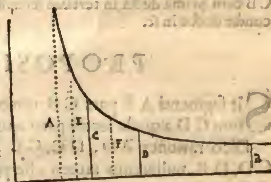
PRO-

PROPOSITIO XXXJ.

SEgmentum hyperbolicum A B ſupponatur diviſum, ſecundum duas diverſas ſeries trium rationum in continua progreſsione Geometrica conſtitutas, ſcilicet in ſeriem A C, C D, D B, & ſeriem A E, E F, F B.

Dico rationem E C æqualem eſſe E D rationi.

Demonſtratio.



RAtio A C ducta in D B eſt duplicata C D, igitur tota ratio A B eſt triplicata rationis C D, ſed eadem ratio A B eſt triplicata E F, cum rationes ſint Geometricè proportionales ex conſtructione, igitur æquales ſunt rationes E F & C D, ablatâ igitur communi ratione C F, remanet ratio E C æqualis F D rationi: Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIJ.

SInt denuo ſegmenti A B rationes A C, C D, D B in ſerie Geometrica, & fiant ſegmenta D F, & C E æqualia:

Dico rationes A E, E F, F B proportionales eſſe.

Demonſtratio.

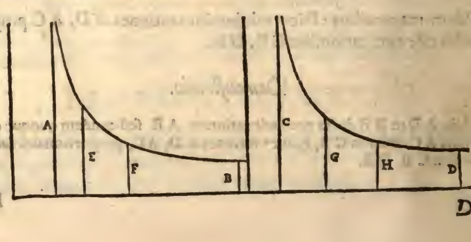
a 13. *huius.* QUoniam ſegmenta D F, C E æqualia ſunt, igitur[a] æquales quoque ſunt rationes E C & F D. Additâ igitur communi ratione C F, erit E F ratio æqualis rationi C D; unde etiam ratio E F tertiæ parti rationis A B æqualis erit, non minus ac ratio C D, quare ſunt[b] proportionales rationes A E, E F, F B.

b 13. & 14. *huius.*

PROPOSITIO XXXIII.

SI duo æqualia ſegmenta Hyperbolica ſecta fuerint, ſecundum diverſas ſeries Arithmeticas in tres partes:

Dico rationes AE eſſe ad C G, ut H D ad F B.



Demon-

Demonstratio.

Segmenta A B, C D æqualia, secta sint in tres partes, ut segmenta A E, E F, F B sint in serie Arithmetica, sicut & segmenta C G, G H, H D, ut tamen series non sint eædem. Oportet demonstrare rationem A E esse ad rationem C G, ut est ratio H D ad rationem F B; quod ita præstabitur: Quoniam ex constructione æqualia sunt segmenta E F, & G H, utpote tertiæ partes suorum integrorum A B & C D, segmentum C G superat A E segmentum eadem differentiâ, quâ differt F B segmentum à segmento H D, eo quod segmentum A E cum F B sit æquale segmento C G cum H D, igitur etiam ratio C G superat rationem A E eodem rationis intervallo, quo ratio F B excedit H D: sunt igitur primæ rationes A C & C G reciprocè proportionales, cum rationibus H D & F B: Quod demonstrandum fuit. a ex 3. l. 1. tom. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Si duæ series trium rationum proportionalium, medias rationes æquales habuerint:

Dico aggregata trium illarum rationum æquales rationes exhibere.

Demonstratio.

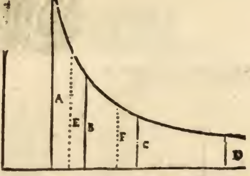
In prima serie aggregatum trium rationum exhibet rationem, quæ est triplicata mediæ. Idem autem præstat aggregatum trium rationum secundæ seriei; igitur productæ rationes ex utraque serie, sunt triplicatæ ejusdem rationis, unde æquales sunt illæ rationes.

PROPOSITIO XXXV.

Sint A, B, C, D lineæ in continua analogia, fiatque rationi B C æqualis E F:

Dico rationes A E, E F, F D proportionales esse, nullatenus autem lineas A, E, F, D.

Demonstratio.



Quoniam rationi B C ductæ in se æqualis est ratio A B ducta in C D sequitur rationes A B, B C, C D, proportionales esse; & ex eodem capite cum E F ratio (quæ æqualis est ex constructione rationi B C) ducta in se, æqualis sit rationi A E ductæ in rationem F D, constat etiam rationes A E, E F, F D proportionales esse. Quod autem lineæ A, E, F, D non sint continuè proportionales sic demonstro: Ratio A ad B, est eadem cum ratione B ad C ex constructione; ratio vero A ad E multa minor est ratione quam habet E ad F; ergo non est A ad E ut E ad F, sicut est ratio A B æqualis B C, unde non sunt proportionales lineæ A, E, F, sicut sunt proportionales lineæ A, B, C. Similiter ostenditur rectas E, F, D adeoque A, E, F, D non esse proportionales.

PROPOSITIO XXXVI.

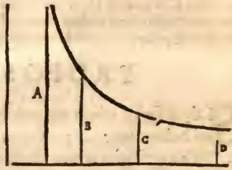
Sint rationes A B, B C, C D proportionales: Dico rectangulum A C ad B D rectangulum, esse ut quadratum B ad C quadratum.

Demonstratio.

233. lib. 1. tom. hujus.

b Ibidem.

Ratio a rectanguli A C ad B quadratum, est æqualis rationi A B ad B C: sed ratio A B ad B C eadem est cum ratione B C ad C D; igitur ratio rectanguli A C, ad B quadratum, eadem est cum ratione B C ad C D. b Sed ratio B C ad C D, eadem est cum ratione rectanguli B D ad C quadratum; ergo etiam ratio rectanguli B D ad C quadratum, eadem est cum ratione A C rectanguli ad B quadratum: ergo ratio rectanguli A C ad B D rectangulum, eadem est cum ratione quadrati B ad C quadratum: Quod demonstrare oportuit.



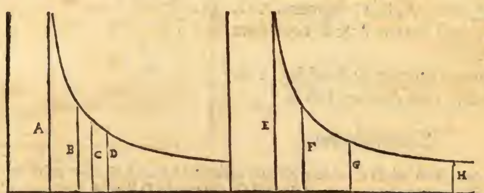
DE

DE PROPRIETATIBUS HYPERBOLICIS PARS SECUNDA

De divisione rationis in duas rationes, variisque rationis majoris aut minoris inæqualitatis compositionibus.

PROPOSITIO XXXVIJ.

DAtam seriem A B, A C, A D in Hyperbola positam, in eàdem vel æquali hyperbola expandere.



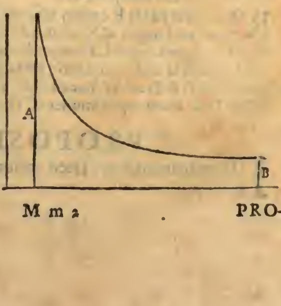
Constructio & Demonstratio.

FIat rationi A B, æqualis ratio E F, rationi vero A C æqualis ratio F G; denique rationi A D æqualis ratio G H; Dico factum quod requiritur. Nam eadem est series rationum, E F, F G, G H, quæ est rationum A B, A C, A D ex constructione. Prima autem series à secunda differt in eo, quod prima series partes aliquas habeat inter se communes, secunda vero nullas habeat.

PROPOSITIO XXXVIIJ.

SInt in Hyperbola lineæ quævis A & B asymptoto parallelæ: Dico rationem A ad A ad rationem A ad B eandem esse cum ratione B ad A.

Demonstratio.

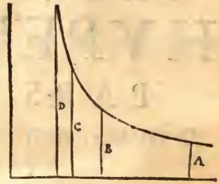


RAtio [a] A ad A ad rationem A ad B, eadem est cum ratione rectanguli A B ad quadratum A, sed [b] ratio rectanguli A B ad quadratum A, æqualis est rationi B ad A; ergo ratio A ad A ad rationem A ad B eadem est cum ratione B ad A.

a 33. lib 1. tom. hujus.

b 13. lib. 8. tom. 2.

PROPOSITIO XXXIX.



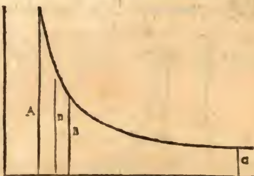
SIt A minor B, & B, C, D proportionales minoris inæqualitatis in hyperbola positæ.

Dico rationem A C ad C D æqualem esse rationi A ad B.

Demonstratio.

a 2. lib. 8. tom. 2. Ratio A C ad C D æqualis est rationi, A C ad B C, est enim B ad C ut C ad D ex constructione. Igitur [a] manifestum est, quod ratio A C ad C D eadem sit cum ratione A ad B. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO XL.



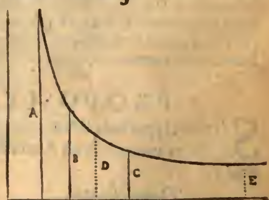
QVod si proportionales fuerint lineæ A, B, C segmenti A C, inter duas autem A & B constituta sit recta D:

Dico rationem D B ad B C eandem fore cum ratione D ad A.

Demonstratio.

a 2. lib. 8. tom. 2. Ratio D B ad B C eadem est cum ratione D B ad A B; sunt enim ex constructione æquales rationes A B & B C; sed [a] ratio D B ad A B est eadem cum ratione D ad A: igitur etiam ratio D B ad B C eadem est cum ratione D ad A: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLJ.



SInt in segmento hyperbolico duæ series proportionalium linearum A, B, C; A, D, E habentes primam communem:

Dico rationi C A æqualem esse rationem C D ad D E.

Demonstratio.

a 33. lib. 1. tom. hujus. Ratio C D ad [a] D E eadem est cum ratione rectanguli C E ad quadratum D; sed ratio rectanguli C E ad quadratum D, est composita ex ratione C ad D & E ad D, hoc est D ad A; quare ratio rectanguli C E ad quadratum D, erit æqualis rationi C ad D & D ad A, hoc est C A, ratio enim C A componitur ex rationibus C D & D A. Patet ergo rationem C D ad D E æqualem esse rationi C ad A.

PROPOSITIO XLII.

IIsdem manentibus: Dico rationem D B ad B C æqualem esse rationi D ad A.

Demon-

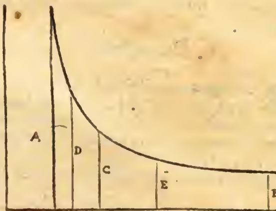
Demonstratio.

Ratio D B ad B C eadem est cum ratione rectanguli D C ad B quadratum, quæ composita est ex ratione D ad B, & ex ratione C ad B, hoc est B ad A; unde patet rationem D B ad B C æqualem esse rationi D ad A.

PROPOSITIO XLIIJ.

Sit ratio A B divisa in C utcumque, deinde rectangulo A B fiat æquale D E:

Dico rationem A C ad C B eandem esse cum ratione D C ad C E.



Demonstratio.

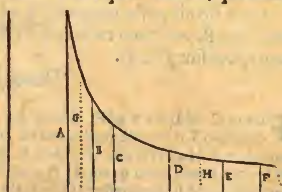
Ratio [a] A C ad C B æqualis est rationi rectanguli A B ad C quadratum; ergo etiam ratio A C ad C B æqualis est rationi, quam habet rectangulum D E ad C quadratum; sed ratio rectanguli D E ad C quadratum æqualis est rationi D C ad C E, igitur etiam ratio D C ad C E æqualis est rationi A C ad C B.

a 33. lib. 7 tom. hujus.

PROPOSITIO XLIV.

Si ratio A B sit ad B C rationem, sicut D E est ad rationem E F:

Dico A B rationem differre à ratione B C æquali ratione, qua ratio D E distat à ratione E F.



Demonstratio.

Fiat ut [a] B ad C ita A ad G, utque E ad F ita D ad H, quoniam igitur ratio A B est ad rationem B C, ut est ratio D E ad E F, erit quoque ratio A B ad A G, ut ratio D E ad D H; sed [b] ratio A B ad A G est ut G ad B: igitur ratio D E ad D H est ut G ad B. Est autem etiam D E ad D H ut H ad E; igitur etiam est G ad B ut H ad E: sunt igitur æquales rationes G B & H E; Quod oportuit demonstrare.

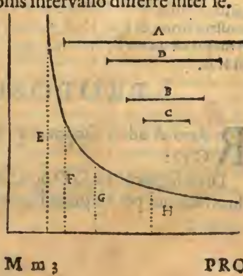
a 14. lib. 8. tom. 2.

b 7. ejusdem.

PROPOSITIO XLV.

Sit ratio A B ad A C, ut D B ratio ad B C rationem:

Dico has proportiones eodem rationis intervallo differre inter se.



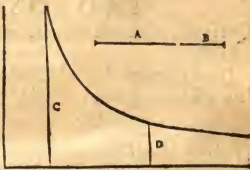
Demonstratio.

Ratio [a] A B ad A C est ut C ad B: similiter ratio D B ad D C est ut C ad B; quare differunt hæ rationes solo intervallo rationis B C, & consequenter eodem intervallo rationis distant inter se. Liquido id constabit: si illi iidem termini constituantur in Hyperbola, ut E, F, G, H, sint æquales A, D, B, C tunc segmentum E H excedet segmentum E G segmento G H, quo etiam segmentum F H superat F G segmentum; igitur ratio E H superabit rationem E G ratione G H, qua etiam ratio F H excedet rationem F G.

a 7. ejusdem.

PROPOSITIO XLVJ.

DAta ſit ratio A B æqualis illi, quam exhibent lineæ C D ſegmenti Hyperbolici:



Dico rationem C ad D non dividendam, per rectam inter C & D, in duas rationes, quarum denominatores ſint A & B.

Demonſtratio.

REctangulum enim C D ad quadratum D, eſt ut linea C ad D, hoc eſt A ad B. Cum igitur [a] non poſſit eadem ratio ſecundò diviſionem pati, ſecundum unam & eandem rationem, infertur quod C D nequeat dividi in duas rationes, quæ producant rationem A ad B, cum ſemel jam ex ipſis terminis ſecundum eandem diviſa ſit.

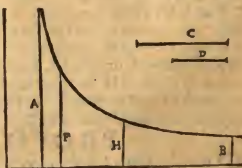
a 40. lib. 1. tom. hujus.

PROPOSITIO XLVIJ.

SInt A, B lineæ conſtituentes ſegmentum hyperbolicum, data ſit inſuper ratio C D minor ratione A B, ſitque utraque ratio majoris inæqualitatis:

Dico dividi poſſe rationem A ad B per aliquam lineam minorem A majorem B, per quam ratio A B diviſa ſit in duas rationes, quarum denominatores ſint C & D.

Demonſtratio.



FIat ut C ad D ita A ad F, deinde fiat rectangulo F B æquale quadratum H. Dico rationem A H ad H B eſſe æqualem C ad D & lineam H minorem quam A, & majorem quam B; quod ſic demonſtro: Quia F B [a] rectangulum æquale eſt quadrato H, igitur H media eſt inter F & B, & conſequenter ratio F H æqualis H B, unde ulterius ratio A H eſt ad H B ut A H ad F H, ſed [b] A H eſt ad F H ut A ad F hoc eſt ex constructione C ad D. Igitur ratio A H ad H B, eſt ut C ad D. Sed ratio A F eſt maioris inæqualitatis, ex constructione, & F ad H eſt majoris inæqualitatis, & æqualis rationi H ad B: igitur H major eſt quam B, & minor quam A, quia [c] ratio A B major eſt quam F H, hoc eſt H B.

a 17. ſexti.
b 2. lib. 6. tom. 2.
c 8. ſexti.

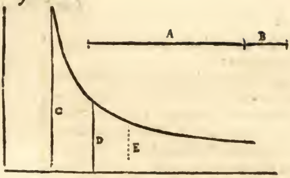
PROPOSITIO XLVIIJ.

RAtio A ad B ſupponatur major, quam ſit ratio linearum ſegmenti C D:

Dico ſegmentum C D non poſſe dividi, ſecundum rationem A ad B, in duas rationes per aliquam lineam contentam in ſegmento C D.

Demon-

Demonstratio.



CUm ratio AB major ſit quã ratio CD, igitur rectangulum CD, ad quadratum D minorem rationem habet, quam A ad B: [a]nam ratio CD rectanguli ad quadratum D, eſt ut C ad D, ergo minor quã A ad B. Sed ratio CD dividitur in duas rationes datam rationem A B continentes, ſi [b] fiat rectangulum CD ad quadratum aliud, puta E, ut A ad B. Cum autem ratio rectanguli CD ad D quadratum minor ſit quam ratio A ad B, & rectangulum CD ad quadratum E ut A ad B; igitur ratio rectanguli CD ad quadratum E major eſt, quam ratio ejuſdem rectanguli ad quadratum D, & [c] conſequenter D major quam E. Adeoque E dividens rationem CD non continetur in ſegméto CD.

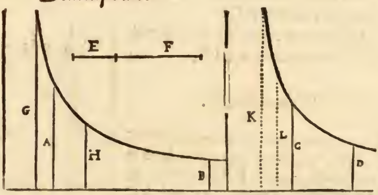
a 1. *ſexti.*
b 56. *lib.* 1. *tom. hujus.*
c 8. *quinti.*

PROPOSITIO XLIX.

SInt duo inæqualia ſegmenta hyperbolica, A B majus, & minus C D, aſſumatur deinde quævis ratio E F, major quidem B A ratione, ſed minor ratione D C:

Dico A B rationem dividi poſſe per aliquam lineam H, inter A & B ſitam, ſecundum rationem E ad F, non autem rationem C D.

Demonstratio.



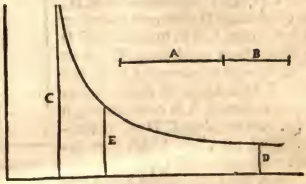
SUppono rationes utraſque AB & CD eſſe majoris inæqualitatis. Fiat igitur ut E ad F ita A ad G, & ſit H media proportionalis inter G & B; erit ratio GH æqualis rationi HB, & conſequenter ut AH ad GH ita AH ad HB; [a] ſed AH ad GH eſt ut A ad G, hoc eſt ex conſtructione, ut E ad F; igitur AH ad HB eſt ut E ad F: Quia vero ratio EF major eſt ratione BA; erit [b] etiam AG major BA, [c] ac proinde GA minor AB, igitur GA minor eſt media parte rationis GB; eſt autem H media inter G & B. igitur [d] bifariam dividit rationem GH, unde patet [e] rationem GH majorem eſſe GA, adeoque H minorem A, majorem autem B.

Quod autem hoc ipſum nequeat fieri in ſegmento CD, conſtabit ſequenti diſcurſu. Quoniam ex conſtructione ratio EF minor eſt quam ratio DC, ſi fiat rationi EF æqualis ratio CK erit etiam ratio CK minor ratione DC, [f] proinde ratio KC major quam CD, unde ſi ratio KD biſecta ſit per aliquam lineam L, erit ratio KL æqualis rationi LD, ac proinde ratio LD major quam ratio CD, & conſequenter [g] recta L major quam C: ſed ratio CL ad KL æqualis eſt rationi C ad K, hoc eſt E ad F; igitur etiam ratio CL ad LD eadem eſt cũ ratione E ad F: eſt autem linea L major C, igitur extra ſegmentum CD; unde patet quod ratio CD non poſſit dividi in duas rationes ſecundum rationem E ad F, per aliquam lineam exiſtentem in ſegmento CD: Quod fuit demonſtrandum:

a 2. *lib.* 6. *tom.* 2.
b 7. *quinta.*
c *defin.* 8. *quini.*
d 1. *hujus.*
e *ex elementis.*
f *def.* 8. *quinti.*
g 8. *quinti.*

Corolla-

Corollarium.



EX ultimis hisce propositionibus Colliges:

1. Si detur ratio aliqua AB majoris inæqualitatis, & alia CD in Hyperbola constituta, similiter majoris inæqualitatis; rationem CD non dividendam, in duas rationes C E, E D, quarum denominatores sint A & B, linea autem E sit intra C D, nisi ratio C ad D major sit ratione A B.

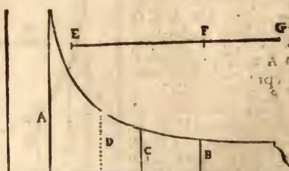
Si autem C D ratio major sit ratione A B, dividaturque C D in duas rationes C E & E D secundum rationem linea dividens riatonem C D, necessario minor erit C & major D, & consequenter erit inter C & D.

Colliges 2. rationem D C minoris inæqualitatis, minorem esse ratione B A similiter minoris inæqualitatis, si D C dividi queat per lineam E minorem C & majorem D, ut sint rationes C E, E D sicut A ad B.

PROPOSITIO L.

SEgmentum hyperbolicum A B sit divisum per C, ut ratio C B minor sit tertia parte rationis A B, deinde fiat ut ratio A C ad C B, ita E F linea ad lineam F G:

Dico quod ratio E F ad F G minor sit quam ratio A ad B,



Demonstratio.

FIat rationi B ad C æqualis ratio C ad D: Quoniam ratio A C ad C B æqualis est rationi E F ad F G, & ratio A C ad C B æqualis rationi A C ad D C, etiam ratio A C ad D C æqualis est rationi E F ad F G: a sed A C ad D C est ut A ad D; igitur ratio E F ad F G erit æqualis rationi A ad D; sed b ratio A ad D minor est, quam ratio A ad B. Patet igitur quod etiam ratio E F ad F G minor sit quam ratio A ad B. Quod fuit demonstrandum.

a 2. lib. 6. tom. 2.
b 8. quinti.

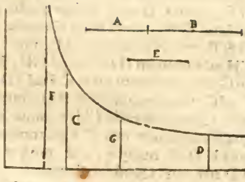
PROPOSITIO LJ.

SIt ratio A ad B minoris inæqualitatis, & aliquod segmentum hyperbolicum, cujus ratio C D sit majoris inæqualitatis, & quidem ut ratio B ad A minor existat ratione, quam habet C ad D: & fiat ut A ad B, ita ratio C E ad E D.

Dico rationes C E & E D fore majoris inæqualitatis, ac proinde aliquam lineam inter C & D in segmento C D, scilicet G æqualem fore lineæ E.

Demon-

Demonstratio.



RAtio B A minor est ratione C D, igitur A B major est ratione D C, estque utraque minoris inæqualitatis; sed ratio D C minoris inæqualitatis divisa est in duas rationes C E, E D secundum rationem AB; igitur [a] recta E minor est C & major D, adeoque tam ratio C E est majoris inæqualitatis quam ratio E D. Fiat autem ut A ad B, ita C ad F, erit F major quam C, fiat media G inter F & D, erit ratio C G ad G D ut ratio C G ad F G, sed[b] ratio C G ad F G est ut C ad F, hoc est A ad B; igitur C G est ad G D ut A ad B: quare cum C E sit ad E D ut A ad B, nec possit C D dividi sub ratione A ad B nisi per unam eandemque lineam, ut[c] in prioribus demonstratum est, manifestum est quod recta E sit ipsi G æqualis; sed E minor est quam C & major B igitur etiam recta G minor est C & major D, & consequenter inter C & D in segmento C D. Patet igitur veritas propositionis.

a 49. hujus.

b 2. lib. 6. tom. 2.

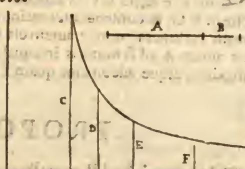
c 60 lib. 1. tom. hujus.

PROPOSITIO LIJ.

POnatur ratio A B majoris inæqualitatis, & quidem major, quam sit ratio C D in segmento hyperbolico, etiam majoris inæqualitatis, deinde fiat ut A ad B ita ratio C E ad E D rationem.

Dico rationem C E fore majoris inæqualitatis, rationem vero E D inæqualitatis minoris.

Demonstratio.



RAtio C E ad E D invenitur [a] si fiat ut A ad B ita C ad F, & inter F & D media proportionalis E, erit ratio C E ad F E æqualis rationi CE ad ED, sed A ad B ratio major est, ex constructione, ratione C D, igitur C ad F ratio major est ratione C ad D, & [b] consequenter recta F minor D, Inventa est autem ratio C E ad E D faciendo D, E, F, proportionales, cum igitur F minor sit D & E media inter D & F, erit E minor D. D autem minor est C ex constructione, adeoque E multo minor quam D, constat igitur rationem C E esse majoris inæqualitatis, rationem vero E D esse inæqualitatis minoris.

a ex 47 hujus.

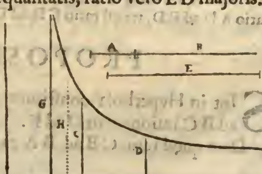
b 8. quinti.

PROPOSITIO LIII.

SIt A B minoris inæqualitatis ratio, & C D majoris, ita tamen ut ratio D C major sit quam ratio A B; & fiat ut A ad B, ita ratio C E ad E D rationem:

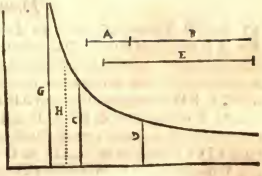
Dico quod ratio C E sit minoris inæqualitatis, ratio vero E D majoris.

Demonstratio.



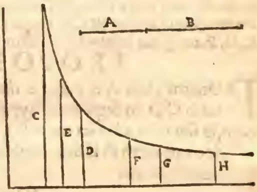
RAtio C E ad E D invenitur [a] si fiat ut A ad B ita C ad G, & inter G & D media proportionalis sit E, erit ratio C E ad E D, hoc est GC, ut C est ad G, hoc est ut A ad B, quia igitur C est ad G ut A ad B, erit G major quam C. Ulterius quia ratio D C major est ratione A B, erit etiam ratio C D major quam ratio C G, & per-

a ex 47. hujus.



consequens ratio C D minor quam ratio G C; igitur C D ratio minor media parte rationis G D; quare si fiat H media inter G & D erit H major quam C, ratio vero CH ad rationem H D, hoc est GH, est ut C ad G, sed cum etiam ratio C E ad ED sit ut C ad G, erunt necessario E & H æquales lineæ; igitur cum ratio CH sit minoris inæqualitatis, etiam ratio C E est minoris, & quia H D est majoris, erit quoque ratio E D majoris: Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LIV.



Data sit ratio A B minoris inæqualitatis, & fiat ut A ad B; ita ratio C E ad E D rationem, deinde ut C E ad E D ita F G ad G H:

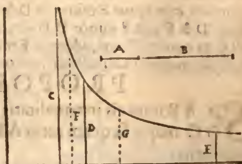
Dico G H rationem majorem esse quam F G.

Demonstratio.

a 16. sexti. Quia C E est ad E D ut F G ad G H [a] igitur C E ducta in G H æquatur E D ductæ in F G, & consequenter rationes [b] C E & G H continent maximam & minimam rationem: minor autem est C E quam E D, quia C E est ad E D, ut A ad B, est autem A ad B minoris inæqualitatis ex constructione: igitur restat G H sit maxima, atque adeo major quam F G quod fuit demonstrandum.

b deducitur ex Clavio ad 25. quinti.

PROPOSITIO LV.



Sit rationi A ad B æqualis ratio C D ad D E, & ratio E C minor A B:

Dico quod ratio A D ad B D æqualis sit rationi C D ad D E.

Demonstratio.

a 2. lib. 6. tom. 2. Ratio [a] A D ad B D est ut A ad B, sed ut A ad B, ita ratio C D ad D E, igitur ratio A D ad B D, ita est ratio C D ad D E.

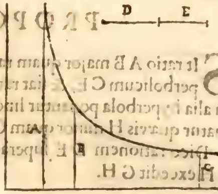
PROPOSITIO LVJ.

Sint in Hyperbola constitutæ tres lineæ A, B, C, ita ut ratio A B sit ad B C rationem ut D ad E:

Dico quod ratio C B ad B A eadem sit cum ratione D ad E.

Demon-

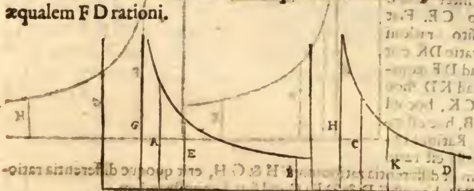
Demonstratio.



RAtio A B ad B C [a] eadem est cum ratione rectanguli A C ad B quadratum; similiter ratio C B ad B A eadem est cum ratione rectanguli C A ad B quadratum; igitur cum ratio rectanguli A C ad B quadratum, eadem sit cum ratione rectanguli C A ad B quadratum, bene sequitur quod ratio C B ad B A eadem sit cum ratione A B ad B C, hoc est D ad E. a 33. lib. 1. tom. hujus.

PROPOSITIO LVII.

SIt ratio A B major quam ratio C D, divisa deinde ratione A B utcumque per E, fiat ut ratio A E ad E B ita ratio C F ad F D rationem. Dico rationem A E non esse æqualem rationi C F, nec rationem E B æqualem F D rationi.



Demonstratio.

FIat ut B ad E ita E ad G, utque D ad F ita F ad H, erit ratio A E ad E B æqualis rationi A E ad G E, [a] hoc est rationi A ad G: & ratio C F ad F D æqualis rationi C F ad H F, hoc est C ad H; & consequenter erunt rationes A G & C H æquales rationes; sed ratio A E ducta in G E, hoc est E B, æqualis est rationi G A, & duplicatæ A E: ratio enim A B componitur ex A E bis sumpta & ex differentia quâ ratio E B superat A E, quæ est G A. Similiter ratio C F ducta in H F æqualis est rationi H C, & duplicatæ rationi C F; ablatis igitur æqualibus rationibus à rationibus G E, & H F, nempe rationibus G A & H C, residuæ rationes sunt A E & C F in se ductæ; cum igitur ratio A B major sit quam C D & ablatæ sint æquales rationes, etiam ratio A E major est, quam ratio C F, & quia proportionales sunt rationes A E ad E B, & C F ad F D, erit ratio A E ducta in rationem F D æqualis rationi E B ductæ in C F, igitur cum ratio A E major sit quam ratio C F, erit E B ratio major quam F D; Igitur inæquales sunt omnes illæ rationes. a 2. lib. 6. tom. 2.

PROPOSITIO LVIII.

IIsdem manentibus: Dico rationem A E ab E B ratione distare eodem intervallo rationis, quo distat ratio C F à ratione F D.

Demonstratio.

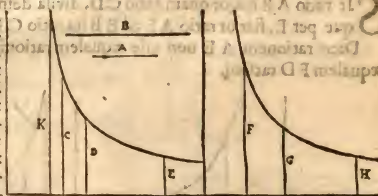
QUoniam ratio A E est ad E B rationem, sicut ratio C F ad F D; igitur [a] ratio A E ducta in F D æquatur rationi E B ductæ in rationem C F, unde proportionales sunt rationes A E, E B, & C F, F D, & per consequens [b] segmenta A E, E B, & C F, F D sunt in Arithmetica ratione, igitur sicut segmenta differunt æquali segmento, etiam rationes æquali intervallo. a 25. quinti. b 18. hujus.

PROPOSITIO LIX.

Sit ratio A B major quam ratio E ad C, quæ terminat segmentum hyperbolicum C E, & fiat rationi A B æqualis ratio C D ad D E: deinde in alia hyperbola ponantur lineæ F & G æquales lineis B, A: denique assumatur quævis H minor quam G:

Dico rationem D E superare rationem C D eadem ratione, qua ratio F H excedit G H.

Demonstratio.



Patet ex propositione decima tertia hujus, lineam D esse inter C & E in segmento C E. Fiat hoc supposito rationi E D æqualis ratio D K, erit rationi C D ad D E æqualis ratio C D ad K D, a hoc est rationi C K, hoc est rationi A ad B, hoc est rationi G ad F. Rationi igitur K C æqualis est ratio F G, quæ cum sit differentia rationum F H & G H, erit quoque differentia rationum K D & C D, hoc est C D & D E: Quod fuit demonstrandum.

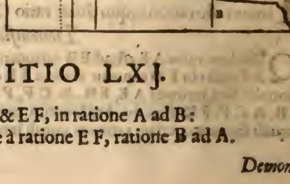
a 2. lib. 6. tom. 2.

PROPOSITIO LX.

In segmento A B sit ratio B ad A minor quam sit ratio C ad D; & fiat ut C ad D ita ratio A F ad F B.

Dico rationem F B differre à ratione A F, ratione D ad C.

Demonstratio.



Fiat ut B ad F, ita F ad G (suppono rationem C D esse minoris inæqualitatis) erit ergo ratio A F ad F B æqualis rationi A F ad G F, hoc a est rationi A ad G, hoc est rationi C ad D: sed ratio A F differt à ratione G F per rationem G ad A; ergo etiam ratio A F differt à ratione F B, per rationem G ad A, hoc est D ad C: Quod fuit demonstrandum.

a ibidem.

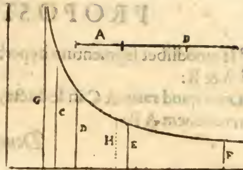
PROPOSITIO LXI.

Sint duæ rationes, nempe C D & E F, in ratione A ad B:

Dico rationem C D differre à ratione E F, ratione B ad A.

Demon-

Demonstratio.



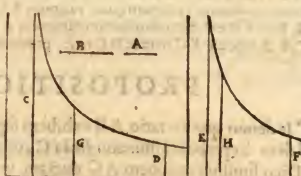
SUpponatur ratio A B minoris inæqualitatis, & fiat rationi E F æqualis ratio D H, erit ergo eadem differentia inter rationes C D & D H, quæ est inter rationes C D & E F: sed propositione præcedenti ostensum est, differentiam rationum, C D, D H æqualem esse rationi B ad A, igitur etiam differentia inter rationes C D & E F. erit ratio B ad A: Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO LXIJ.

SIt ratio A B minoris inæqualitatis major quam ratio D C, & major quam F E, sitque segmentum C D majus E F segmento, & fiat ut A ad B, ita ratio C G ad G D, & ratio E H ad H F:

Dico segmenta C G, G D esse in Arithmetica ratione, cum segmentis E H ad H F.

Demonstratio.



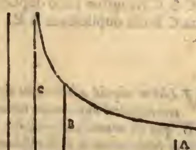
QUoniam ratio C G ad G D, est ut A ad B, utque A ad B ita quoque est ratio E H ad H F; igitur ut C G ratio ad G D rationem, ita est ratio E H ad H F rationem: sed [a] quando rationes C G, G D sunt proportionales cum rationibus E H, H F Geometricè, tunc segmenta sunt in serie Arithmetica; Igitur patet illa esse in Arithmetica ratione.

a 18. *huius.*

PROPOSITIO LXIII.

SInt A, B, C, in Hyperbola consequenter positæ:
Dico rationem A C in C A æquari rationi A B in B A.

Demonstratio.



RAtio [a] A B ad A C eadem est cum ratione C ad B: similiter [b] ratio C A ad B A est ut C ad B; igitur ratio A B ad A C eadem est cum ratione C A ad B A, ergo proportionales sunt rationes A B, A C cum rationibus C A & B A, unde prima ratio A B ducta in quartam B A æquatur secundæ A C ductæ in tertiam C A: Quod fuit demonstrandum.

a 7. *lib.* 6. *tom.* 2.

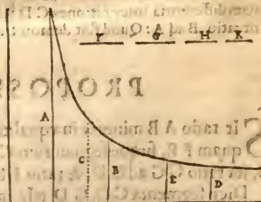
b 2. *Ibidem.*

PROPOSITIO LXIV.

SIt quodlibet segmentum hyperbolicum A B & quælibet linea C, inter A & B:

Dico quod ratio A C in se ducta, & C B in se ducta producant duplicatam rationem A B.

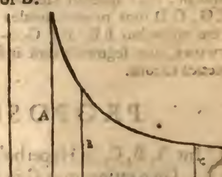
Demonstratio.



FIat rationi A B æqualis B D & rationi A C æqualis B E. Tunc ratio A C ducta in C B exhibet rationem A ad B per simplices rationes A C & C B, idemque producit ratio B E in E D, igitur ratio A C in C B, C B in B E, B E in E D producunt duplicatam rationem A B. Sint autem denominatores harum rationum, F, G, H, K, erunt proportionales, F, G; & H, K, cum fit ut A C ad C B ita B E ad E D: ratio autem F ad K producitur sive fiat multiplicatio F in G, & G in H, & H in K, sive fiat ex ductu F in H, & H in G, & G in K; sic etiam rationes A C in B E, B E in C B, C B in E D eandem producunt rationem quam rationes A C, C B, B E, E D. Sed rationes A C, C B, B E, E D exhibent duplicatam rationem A B, igitur etiam rationes A C, B E, B C, E D, hoc est A C in se & B C in se, producunt duplicatam rationem A ad B.

PROPOSITIO LXV.

a SIt denuo quævis ratio A B exhibens segmentum hyperbolicum, in eadem hyperbola assumatur linea C, minor B.



Dico similiter rationem A C ductam in se, & C B ductam in se producere rationem duplicatam A B.

Demonstratio.

RAtio A C ducta in C B exhibet rationem A B; sed ratio duplicata A C & duplicata C B continet bis per multiplicationem rationes A C & C B; igitur ratio duplicata A C & duplicata C B dat duplicatam A B.

Scholion.

VIdetur aliquid admiratione dignum enuntiari, cum ratio major dicitur ducta in se producere rationem duplicatam rationis minoris; sed bene consideranti apparebit per rationem C B, *quæ est minoris inæqualitatis, tolli excessum, quo* A C *ratio superat rationem* A B, *ac proinde solam rationem* A B *residuam remanere. Ratio enim* A C *ducta in* C B, *exhibet solam rationem* A B; *quia* [a] *ratio* B C *ducta in* C B, *exhibet rationem* B *ad* B.

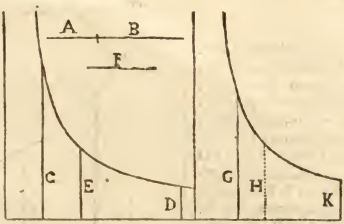
a 76. lib. 8. tom. 2.

PROPOSITIO LXVJ.

SIt ratio A B minor quam ratio D C, & fiat vt A ad B ita ratio C E ad E D, & assumatur quævis F:

Dico rationem A F, ductam in rationem E D, æqualem esse rationi B F, ductæ in rationem C E.

Demonstratio.



TRansferantur rationes in hyperbolico segmento, fiatque rationi A ad F æqualis ratio G ad H, & similiter rationi B ad F fiat ratio H K æqualis; erit igitur ratio A F ad B F, ut ratio G H ad H K; & quia ut A ad B ita est ratio C E ad E D rationem, etiam ratio A F ad rationé [a] B F erit ut ratio CE ad E D rationé (est enim A F ad B F ut A ad B) & consequenter rationi C E ad E D, æqualis erit ratio G H ad H K; igitur sunt proportionales rationes C E ad E D, & G H ad H K; ergo ratio C E ductâ in H K æqualem exhibet rationem illi, quæ emergit ex ratione E D ductâ in G H; & consequenter ratio A F ducta in rationem E D æqualem profert rationem illi, quæ resultat ex ratione B F ductâ in C E: Quod fuit demonstrandum.

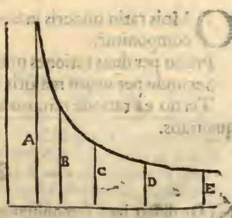
a 2. *lib.* 8. *tom.* 2.

PROPOSITIO LXVII.

POnatur series segmentorum hyperbolicorum A B, B C, C D &c. in serie dupla:

Dico seriem totam rationum A B, B C, C D esse duplicatã rationis A B.

Demonstratio.



PRogressio segmentorum est seriei duplæ, ex ipsa constructione, igitur duplum est segmentum A B segmenti B C; & B C duplum segmenti C D, igitur quam est multiplex segmentum A B segmenti B C, tam est multiplex segmentum B C segmenti C D; sed [a] quam est multiplex segmentum A B ipsius B C, tam est multiplicata ratio A B rationis B C, & consequenter ratio A B est rationis B C duplicata: similiter B C duplicata C D &c. Quod autem terminus hujus seriei terminetur in linea, quæ est finis segmenti A E, quod duplum est segmenti A B; docuimus lib. 6. tom. 2. prop. 131. &c.

a 125. *lib.* 6. *tom.* 2. & *sequenti.*

PROPOSITIO LXVIIJ.

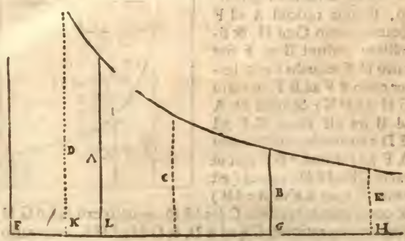
Omnis ratio majoris inęqualitatis tripliciter per multiplicationem componitur, per duas rationes.

Primo per duas rationes majoris inæqualitatis:

Secundo per rationem minoris inæqualitatis, ductam in rationem majoris inęqualitatis.

Tertio per rationem majoris inęqualitatis, in rationem minoris inęqualitatis:

Demonstratio.



Sint duæ lineæ A B in hyperbola constitutę, asymptoto parallelæ, constituentes rationem majoris inæqualitatis, & ponatur tres lineæ C, D, E: C inter A & B: D vero vicinior asymptoto quã sit A; & E remotior ab asymptoto quã sit B. Ratio A ad B est composita ex rationibus A ad C & C ad B, quæ cum sint rationes majoris inæqualitatis, patet prima pars propositionis.

Eadem ratio A B componi potest ex ratione A ad D, & D ad B: est autem D major quam sit A, ut pote vicinior asymptoto; igitur ratio A ad D est minoris inæqualitatis, ratio vero D ad B major est quam ratio A ad B: igitur cum ex constructione ratio A B sit majoris inæqualitatis, potiore jure erit ratio D ad B majoris inæqualitatis: manifesta igitur est veritas secundæ partis propositionis.

Veritas tertiæ partis etiam liquet, nam ratio A B componitur ex ratione A ad E, quæ est major quam A ad B, & ex ratione E ad B, quæ cum sit minoris inæqualitatis (nam est E ad B ut F G ad G H) constat quoque rationem A B compositam esse ex ratione majoris inæqualitatis, ductâ in rationem minoris inæqualitatis.

PROPOSITIO LXIX.

Omnis ratio minoris inæqualitatis ex duabus rationibus tribus modis componitur.

Primo per duas rationes minoris inęqualitatis:

Secundo per unam majoris inæqualitatis, altera vero minoris:

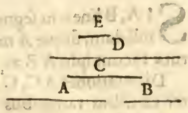
Tertio ex ratione minoris inęqualitatis, ductâ in rationem majoris inęqualitatis.

Demonstratio.

Non differt hæc demonstratio à præcedenti; nam ratio B ad A (supposito quod B sit remotior ab asymptoto, quàm sit A; minor est B quam A, nam ex elementis conicis constat, esse B ad A, ut F L ad F G) componitur ex ratione B ad C, & C ad A; quia C medio loco ponitur inter A & B, secundum tenorem constructio-

ſtructionis in præcedenti propoſitione factæ, utraque ratio B C, C A eſt minoris inæqualitatis; quare manifeſtum eſt quod aſſeruimus primo loco. Quod autem ſecundo dictum eſt, ex hoc liquet, quod linea E ex constructione ſit remotior ab aſymptoto quam ſit recta A & B; unde fit rationem B E majoris eſſe inæqualitatis, rationem vero E B minoris.

Quia vero etiam ratio B A componitur ex ratione B ad D quæ eſt minoris inæqualitatis (eſt enim B ad D ut F K ad F G, ex elementis conicis) & ex ratione D ad A, quæ eſt majoris inæqualitatis: Igitur veritas quoque tertiæ partis manifeſta eſt.

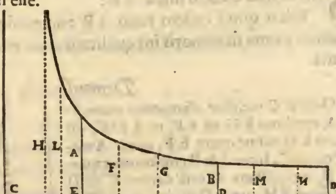


Brevius oſtendi poterit harum duarum propoſitionum veritas: ſint A, B conſtituentes aliquam rationem majoris inæqualitatis, ſitque C minor quam A & major B. ſit ulterius D major A: denique ſit etiam E minor quam B: erit utraque ratio A ad C, & C ad B majoris inæqualitatis: unde ratio A B erit compoſita ex rationibus majoris inæqualitatis: deinde eadem ratio erit compoſita ex rationibus A D, D B, quarum prima eſt minoris, & ſecunda majoris inæqualitatis: tertia vero ratio A B componitur ex duabus rationibus, A E majoris inæqualitatis, & E B minoris inæqualitatis.

Corollarium.

SOlis igitur his tribus modis continget formari aliquam rationem, ex compoſitione duarum per multiplicationem, ſive illa fuerit majoris vel minoris inæqualitatis, quæ licet videantur diverſæ ac proinde aliquid admirationis ſecum adferre: nihilominus ad unam ſolam reduci natæ ſunt, ſine ulla violentia aut contortione; videtur enim ratio A B, prout dicitur compoſita ex rationibus A E, & E B, differre ab eadem ratione A B, prout compoſita eſt ex duabus rationibus A C, C B: ſed admirationis ratio ceſſabit ſi perpendamus, quod eadem ratio A B, quatenus compoſita dicitur ex ratione A E & E B, etiam debeat, vel queat intelligi ex ratione A ad B, & B ad E, & E ad B, hoc eſt A ad B & B ad B: nam ratio B ad E tantum tollit, quantum rationis addit ratio E B.

Etſi omnis hæc doctrina ex elementis manifeſta ſit, nihilominus, quia neceſſaria nobis eſt ut perficiamus problema, quod ob nimiam extenſionis ſuæ vaſtitatem, tenebris involutum eſt, cenſemus nullam doctrinam, quæ aliquid luminis conferre nata eſt, prætermittendam eſſe.



Pręmiſimus duabus his propoſitionibus omnes modos, quibus ratio majoris vel minoris inæqualitatis, per duas rationes componi poteſt. Sequitur ut paucis ſimiliter oſtendamus, ex quibus rationibus componatur, quęvis ratio ſi per tres rationes compoſitio aut multiplicatio fieri poſtuletur. Ponatur aliqua ratio majoris inæqualitatis A B, erit igitur ut A ad B, ita C D ad C E, ex elementis conicis, ſi C ſupponatur centrum hyperbolæ; poterunt duæ lineæ inter A & B in ſegmento A B conſtitui, nempe F & G, eritque ratio A ad B compoſita ex tribus rationibus majoris inæqualitatis, ſcilicet ex ratione A ad F & F ad G, denique G ad B, quæ erit prima ratio componendi rationem A ad B. Secundus modus exhibendi eandem rationem A ad B, eſt, ſi loco F ſtatuatur H major quam ſit A, & ſic ratio A ad B exhibebitur ex multiplicatione rationis A H & H G & G B. Tertius vero reſultabit, ſi loco H aſſumamus K lineam minorem quam ſit B, & fiat multi-

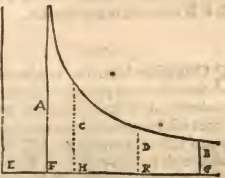
plicatio rationis A K in K G & K G in G B. Quartus deinde si fiat compositio rationis A B per rationes A H, H K & K B. Quintus quoque modus formandi rationem A B per triplicem rationem, est ratio A L, L H, H B. Sextus modus si assumatur ratio G K, quæ sit æqualis tertiæ parti rationis A B; tunc enim erit ratio A G ad G K, sicut G K ad K B. Hos aliosque modos in quantum nobis utiles sunt, sequentibus propositionibus explicabimus.

PROPOSITIO LXX.

SI A, B lineæ in segmento hyperbolico situm habeant Asymptoto parallelum, sitque A major B, & inter A & B duæ lineæ C & D constitutæ fuerint ipsis A B æquidistantes:

Dico rationes A C, C D, D B esse majoris inæqualitatis, & consequenter ex tribus rationibus majoris inæqualitatis esse compositam rationem A B.

Demonstratio.



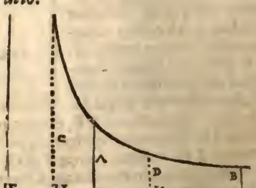
QUoniam ordine suo A, C, D, B lineę in segmento collocatę sunt asymptoto parallelę, & recta A major B ex constructione; igitur quam rationem obtinent A, C, D, B, eandem servant E G, E K, E H, E F: igitur ut G E est ad F E, ita est A ad B, utque G E est ad E K, ita est D ad B. Sed G E major est quam K E, igitur D major est quam B, quare ratio D B est ratio majoris inæqualitatis; similiter ut est E K ad E H, ita est C ad D, unde eodem jure C est major D, ac proinde ratio C D est ratio majoris inæqualitatis; & quia idem infertur de ratione A C, constat rationes A C, C D, D B, esse omnes majoris inæqualitatis.

PROPOSITIO LXXJ.

SInt denuo eædem lineæ A B:

Dico quod eadem ratio A B componi possit ex tribus rationibus, quarum prima sit minoris inęqualitatis, duæ reliquæ vero majoris inæqualitatis.

Demonstratio.



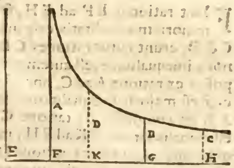
POnatur C vicinior asymptoto quam sit A, erit linea E H ad E F, ut A ad C, est autem E H minor quam E F, igitur A minor quam C. Inter A & B constituatur quævis D, æquidistans A, erit denuo C ad D ut E K ad E H, unde C major quam D, & ob eandem causam erit D major B; igitur tam ratio C D quam D B est majoris inæqualitatis; & quia A ostensa est minor quam C, erit ratio A C minoris inæqualitatis. Ratio autem A B componitur ex ratione A C, quæ est minoris inæqualitatis, & ex rationibus C D, D B quæ sunt majoris inæqualitatis; igitur verum est quod ratio A B possit componi ex tribus rationibus, quarum prima sit minoris inæqualitatis, reliquæ majoris.

PRO-

PROPOSITIO LXXIJ.

EAdem manente ratione A B: Dico eandem rationem componi posse ex tribus rationibus, quarum prima sit majoris inæqualitatis secunda minoris, & iterum tertia majoris.

Demonstratio.

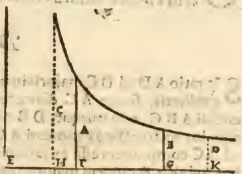


FIat ut E G ad E H ratio sit minoris inæqualitatis, & in H erigatur C, quæ æquidistet B, erit C minor quam B, deinde fiat E K major quam E F, minor autem quam E G. & erigatur D, quæ æquidistet A; erit D minor quam A, & minor quam B. Ratio A B composita est ex ratione A ad C, quæ est majoris inæqualitatis, & ex ratione C ad D, hoc est E K ad E H, quæ est minoris inæqualitatis; denique ex ratione D ad B, hoc est E G ad E K, quæ cum sit majoris inæqualitatis, perspicua est veritas hujus propositionis.

PROPOSITIO LXXIIIJ.

IIsdem positis. Dico rationem A B componi posse ex tribus rationibus, quarum prima sit minoris inæqualitatis, altera majoris, tertia minoris.

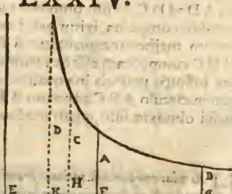
Demonstratio.



FIat rationi minoris inæqualitatis E H ad E F æqualis ratio A ad C, erit igitur ratio A C minoris inæqualitatis; deinde, rationi quoque minoris inæqualitatis E G ad E K sit æqualis ratio D B, tunc ratio E H ad E K erit minor quam ratio E G ad E K, ergo etiam E H ad E K, hoc est D ad C, erit minoris inæqualitatis, uti & ratio D ad B. Ratio itaque A B est composita ex ratione A ad C, quæ est minoris inæqualtiatis, & ex ratione C ad D, quæ est majoris inęqualitatis (ostensum est enim rationem D ad C esse minoris) denique ex ratione D ad B, quæ cum sit ostensa minoris inæqualitatis, manifestum est rationem A B componi posse ex tribus rationibus minoris, majoris, & minoris inæqualitatis, prout enuntiat propositio.

PROPOSITIO LXXIV.

ULterius assero rationem A B ex tribus rationibus compositam esse, quarum prima sit minoris inæqualitatis, secunda etiam minoris, tertia vero majoris inæqualitatis.



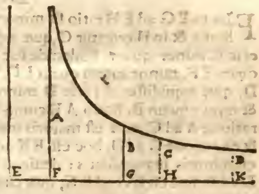
Demonstratio.

FIant rationes E F ad E H, & E H ad E K majoris inæqualitatis, & erigantur C & D parallelę asymptoto, erunt etiam rationes C A & D C majoris inęqualitatis. Ratio igitur A B est composita ex ratione A C minoris, & C D etiam minoris, & ulterius ex ratione D B majoris inæqualitatis. Patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO LXXV.

Etiam aſſero eandem rationem compoſitam eſſe ex tribus rationibus, quarum prima ſit majoris, & ſimiliter ſecunda majoris, tertia vero minoris inæqualitatis.

Demonſtratio.

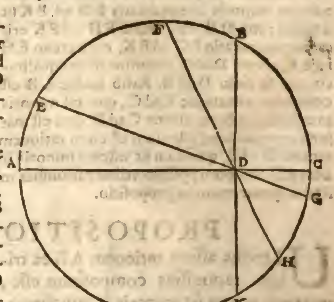


Fiant rationes E F ad E H, & E H ad E K minoris inæqualitatis, eriganturque rectæ C & D, erunt igitur rationes C B & D B minoris inæqualitatis; eſt autem ratio A B compoſita ex ratione A ad C, hoc eſt E H ad E F, quæ eſt majoris inæqualitatis: inſuper ratio A B eſt compoſita ex ratione C ad D, quæ eſt æqualis rationi E K ad E H, majoris inæqualitatis: denique ex ratione D ad B, quæ eſt minoris inæqualitatis, utpote æqualis rationi E G, ad E K. Quare liquet rationem A B componi poſſe ex rationibus tribus, quarum prima ſit majoris inæqualitatis, uti & ſecunda, tertia vero minoris inæqualitatis.

PROPOSITIO LXXVJ.

Oportet oſtendere quamvis rationem majoris inæqualitatis compoſitam eſſe, ex infinitis rationibus majoris inæqualitatis.

Demonſtratio.



Sit ratio A D ad D C majoris inæqualitatis, ſitque A C diameter circuli A B C, erigaturque D B ad angulos rectos: Dico rationem A D ad D C compoſitam eſſe ex rationibus infinitis, & quidem majoris inæqualitatis, quod ſic conſtabit:

Ducantur quotvis numero lineæ per punctum D, ſcilicet E D, F D, erunt ſemper [a] rationes A D ad E D, & E D ad F D, inſuper F D ad D B majoris inæqualitatis, eſt autem ratio A D ad D C ex illis omnibus rationibus compoſita, igitur patet rationem majoris inæqualitatis A D ad D C compoſitam eſſe ex rationibus infinitis majoris inæqualitatis, cum in circulo A B C ad arcum A E B infinitæ lineæ duci queant, quæ eidem diſcurſui obnoxiæ ſunt, quem modo adduximus.

[a] *deducitur ex 7. tertii.*

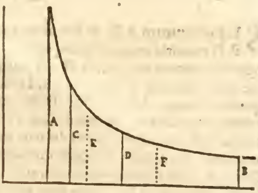
Scholion.

Has vias componendi rationes præmittere opere-pretium duxi, ut faciliore methodo uterer tendendi ad determinandas ſeries rationum, quæ in continua ſunt analogia; quippe non omnes rationum trium multiplicationes aptæ ſunt, ut ex illis conſtituatur aliqua ſeries, quæ eandem rationem contineant: ut ex ſequentibus patebit.

PROPOSITIO LXXVIJ.

OMnis ratio majoris inæqualitatis componi poteſt ex tribus rationibus majoris inęqualitatis, quæ ſint in ſerie continua ejuſdem rationis.

Demonſtratio.



QUod ratio aliqua majoris inæqualitatis componatur ex tribus rationibus majoris inæqualitatis, [a] prius oſtendimus: hac vero propoſitione etiam demonſtrare intendimus, rationem verbi gratia A B, componi ex tribus rationibus majoris inæqualitatis, quæ ſint in eadem ſerie. Si dividatur ſegmentum A B in tres partes æquales per rectas C & D, tunc [b] omnes tres rationes A C, C D, D B æquales erunt, & quia ſegmentum A B eſt triplum ſegmenti A C vel C D, hinc etiam [c] ratio A B eſt triplicata rationis A C, adeoque rationes A C, C D, D B ſunt proportionales; eſt autem ex ſuppoſitione ratio A B majoris inæqualitatis, ergo & ratio A C, vel C D, imo D B.

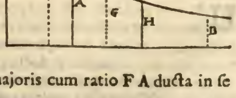
a 70. hujus.
b ex 3. hujus.
c 125. lib. 6. tom. 2.
d 14. hujus.

Docuimus autem hic [d] quod ſi rationi C D conſtituatur aliqua ratio æqualis quovis loco in ſegmento A B, quod emergent tres rationes in ſerie proportionali: igitur liquido conſtat quod ratio A B componi poſſit plurimis modis, per tres rationes majoris inæqualitatis, quæ ſint in continua analogia, nam ſemper ratio A E erit majoris inæqualitatis, ſicut & rationes E F, & F B.

PROPOSITIO LXXVIIJ.

OMnis ratio majoris inæqualitatis poteſt componi ex tribus rationibus in eadem ſerie continuatis, quarum prima ſit minoris inæqualitatis, & duæ reliquę inęqualitatis majoris.

Demonſtratio.



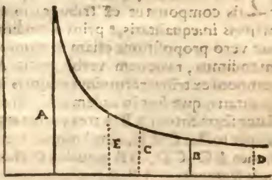
FIat rationis B A tertia pars A F, & fiat A G ratio æqualis F A rationi: Dico rationes A F, F A, A B proportionales eſſe. Ratio enim F A ducta in ſe æqualis eſt rationi F G, ſicut etiam ratio A F, hoc eſt G A, ducta in A B æqualis eſt rationi [a] G B, quæ eſt æqualis rationi F G; nam A B, ratio triplicata eſt rationis A G, cum A G ſit tertia pars rationis A B; auferatur autem ratio A G, remanet G B duplicata A G, ſicut F G duplicata eſt A G: igitur patet compoſitionem talem fieri poſſe, nam ratio A B eſt compoſita, ex ratione A F, quę eſt minoris inęqualitatis, & ex F A, & A B, quæ ſunt inæqualitatis majoris cum ratio F A ducta in ſe æqualis eſt rationi A E in A B, hoc eſt G A in A B.

a Scholion. prop. 65. hujus.

PROPOSITIO LXXIX.

Ratio majoris inæqualitatis componi poteſt ex tribus rationibus in continua ſerie exiſtentibus, quarum prima & ſecunda ſint majoris inæqualitatis, tertia vero minoris.

Demonſtratio.



Sit ſegmentum A B, & fiat aliqua ratio B D majoris inæqualitatis, quæ ſit minor tertia parte rationis A B, & fiat tertiæ parti rationis A B æqualis C D: Dico quod rationes A C, C D, D B ſint in continua analogia, & quod duæ primæ rationes ſint majoris inæqualitatis, tertia vero minoris: Quod ita demonſtrabitur. Ratio A D eſt majoris inæqualitatis, cum ſit major quam A B; & quia ex conſtructione ratio B D minor eſt quam tertia pars rationis A B, & C D æqualis tertiæ parti rationis A B, igitur etiam C D eſt ratio majoris inæqualitatis, & major ratione B D; unde C major eſt quam B; igitur cum ratio C B ſit ratio majoris inæqualitatis, & minor quam tertia pars rationis A B, erit etiam ratio A C major duabus tertiis rationis A B, & conſequenter rationis inæqnalitatis majoris. Componitur autem ratio A B ex tribus rationibus A C, C D, quæ ſunt majoris inæqualitatis, cum ex conſtructione ratio B D ſit majoris, & ex ratione D B, quæ eſt minoris inæqualitatis; igitur componitur ratio A B ex duabus rationibus majoris inæqualitatis, & una inæqualitatis minoris. Reſtat modo ut demonſtremus, quod tres illæ rationes verè ſint proportionales; Cum ratio C D ſit tertia pars rationis A B; igitur ratio C D ducta in ſe æquatur duabus tertiis rationis A B, quibus quoque æqualis eſt ratio A C ducta in D B. Si enim fiat rationi C D æqualis ratio E B, auferatur ex rationibus E B & C D ratio C B, erit E C ratio æqualis rationi B D, ſed A C in C E producit AE rationem, quæ eſt æqualis duabus tertiis partibus rationis A B, igitur A C in D B æqualis eſt duabus tertiis rationis A B: igitur rationes A C, C D, D B proportionales ſunt.

PROPOSITIO LXXX.

Nulla ratio majoris inæqualitatis compoſita eſt ex tribus rationibus, quarum prima eſt majoris inæqualitatis, ſecunda vero minoris, tertia denique majoris, ut omnes ſint in eadem ſerie continuata.

Demonſtratio.

Ut tres rationes ſint proportionales neceſſarium eſt, ut media in ſe ducta æqualis ſit duabus extremis in ſe invicē multiplicatis: ſed duæ majoris inæqualitatis rationes in ſe ductæ, exhibent rationem majoris inæqualitatis, ratio verò minoris inæqualitatis in ſe ducta producit rationem minoris inæqualitatis: Ratio autem minoris inæqualitatis, cum nequeat eſſe æqualis rationi majoris inæqualitatis, manifeſto conſtat nullam rationem majoris inæqualitatis componi poſſe ex tribus rationibus, in continua ſerie poſitis, quarum extremæ duæ ſint majoris, media vero minoris inæqualitatis.

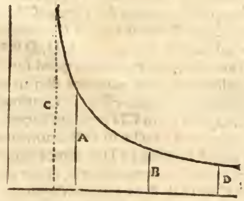
PRO-

PROPOSITIO LXXXI.

NVlla ratio majoris inæqualitatis composita est ex tribus proportionalibus rationibus, quarum prima scilicet & tertia sunt minoris inæqualitatis, media vero majoris.

Demonstratio.

COnstituatur ratio A B majoris inæqualitatis, denuo in hyperbola, ut lineę A & B sint asymptoto æquidistantes, & fiat ratio A C minoris inæqualitatis, ratio vero B D majoris, aliter enim nequeunt rationes prima A C & ultima D B constitui, ut sint minoris inæqualitatis. Igitur ratio A C prima ducta in tertiam D B æqualis erit rationi C D ductæ in se: Ratio autem C D supponitur esse majoris inæqualitatis, ergo multo majoris erit ratio C D ducta in se; atqui ratio A C est minoris inæqualitatis, ex suppositione; igitur ipsa



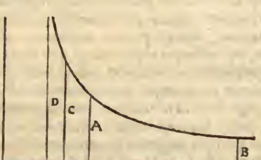
ratio A C ducta in D B, erit multo magis minoris inæqualitatis. Cum igitur æqualitas nequeat constitui inter rationes minoris inæqualitatis & majoris inæqualitatis, quæ tamen necessaria est ad formandas tres rationes proportionales, benè infertur; quod nulla ratio majoris inæqualitatis exsurgere possit ex tribus rationibus in se ductis, quarum sola media sit majoris inæqualitatis, extremæ autem minoris.

PROPOSITIO LXXXII.

NVlla ratio majoris inæqualitatis componitur ex tribus rationibus quæ sunt in continua analogia, si prima & secunda fuerint minoris inæqualitatis, tertia majoris.

Demonstratio.

COmpareat iterum ut prius ratio A B, & sint A C, C D rationes inæqualitatis minoris: Dico non esse proportionales rationes A C, C D, D B; quod sic demonstro: Si sint proportionales, igitur ratio C D in se ducta æqualis est rationi A C in D B, sed ratio A C ducta in DB, exhibet rationem majoris inæqualitatis, cum ratio A C major sit ratione B D: igitur etiam



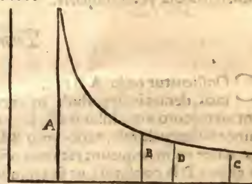
ratio C D ducta in se erit ratio majoris inæqualitatis, debet enim æqualis esse rationi primæ ductæ in tertiam; quod fieri cum nequeat, patet nullam rationem majoris inæqualitatis, ex tribus rationibus conflari posse, quæ proportionales sunt, ita ut media sit minoris, prima quoque minoris, & tertia majoris inæqualitatis.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIIJ.

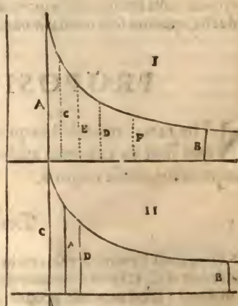
NVlla ratio majoris inæqualitatis componitur ex tribus rationibus, in ſerie continuata conſtitutis, quarum prima ſit majoris, ſecunda autem & tertia minoris inæqualitatis.

Demonſtratio.



NOn poteſt conſtitui alia ratione ſeries in propoſitione requiſita, poſitâ ratione A B, quæ ex tribus rationibus componi debeat, in continua proportione exiſtentibus, niſi ſtatuendo duas lineas C & D minores quam B, ita ut ratio A C ſit majoris inæqualitatis, & duę reliquę C D, D B minoris. Dicit itaque propoſitio, quod nullo modo poſſint tres illę rationes dici in continua analogia. Si enim eſſent in continua analogia, igitur ratio C D ducta in ſe ęqualis eſſet rationi A C ductæ in D B : cum autem ratio B D minor ſit quam ratio A C, igitur ratio A C ducta in D B manet majoris inæqualitatis, & ratio C D ducta in ſe manet minoris inæqualitatis, igitur non ſunt æquales illæ rationes, quæ reſultant ex A C in D B, & ex ratione duplicata C D : unde etiam manifeſtum eſt, quod nulla ratio majoris inæqualitatis componatur ex tribus rationibus proportionalibus, quarum prima ſit majoris inęqualitatis, & reliquæ duæ minoris. Quod demonſtrandum fuit.

Scholion.



PRædictæ propoſitiones viſæ ſunt mihi neceſſariæ, quarum hoc loco mentionem facerem, ut ſciat lector, quibus uti debeat dum ad ſolutionem problematum Meſolabii animum converterit. Prorſus enim neceſſaria eſt ſeries trium rationum proportionalium pro ea methodo, quâ uti decrevimus in materia Meſolabii exhibenda. Quia vero ſolummodo duas propoſitiones reperire induſtriâ meâ potui, quæ tres rationes exhiberent in continua analogia conſtitutas, idipſum data opera conatus ſum docere, exponendo varios modos, quibus data ratio componitur ex tribus rationibus varia diſpoſitione ordinatis: Repudiatis igitur omnibus modis præter illos, quos propoſitionibus ſeptuageſima ſeptima & ſeptuageſima octava explicuimus, deinceps propius accedemus, ad praxim, methodumque explanandam, quâ duabus illis propoſitionibus uti conveniat, quarum prima oſtendit rationem quamcumque majoris inæqualitatis A *ad* B, *poſſe dividi in tres rationes continuè proportionales, quovis loco conſtituatur (intra terminos* A *&* B, *in hyperbola conſtitutos aſymptoto æquidiſtantes) ratio quædam* C *ad* D, *vel* E *ad* F, *cujus triplicata ſit ratio* A B *: ut patet demonſtrationem conſideranti. Altera vero docet ; idem ipſum præſtari poſſe per eandem rationem* C D, *quæ ſit æqualis tertiæ parti rationis* A B; *ſi primus ejus terminus, uti apparet in ſecundo ſchemate major exiſtat quam* A , *& ſecundus* D *eâdem* A *linea minor, ut tamen ratio* C D *æqualis ſit tertiæ parti rationis* A B; *ſi ſtatuatur ratio* C D *æqualis tertiæ parti* A B *in lineis, quæ ſingulæ majores exiſtant rectâ* A, *etiam ſemper emergent tres rationes proportionales, componentes rationem* A B, *ſcilicet rationes* A C, C D, D B, *prout exhibetur tertio ſchemate.*

DE PROPRIETATIBUS HYPERBOLICIS PARS TERTIA.

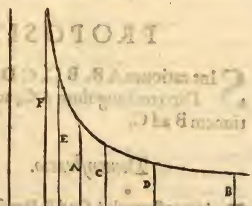
De Divisionibus rationis alicujus in tres rationes proportionales.

PROPOSITIO LXXXIV.

SIt series rationum A C, C D, D B proportionalium majoris inæqualitatis, & ratio A C minor sit ratione C D, & fiat rationi D C æqualis CE, similiter rationi B D æqualis C F:

Dico rationes A C, C D, D B esse in serie linearum, A, E, F.

Demonstratio.



RAtio A C ad C D eadem est cum ratione A C ad E C, & ratio C D ad D B eadem cum ratione E C ad F C, ex constructione, sed rationes A C, C D, D B sunt in continua analogia, igitur etiam rationes A C, E C, F C sunt in continua analogia, [a] ratio autem A C est ad E C ut A ad E, & ratio E C ad F C ut E ad F, adeoque rationes A C, E C, F C sunt in serie linearum, A, E, F, igitur & rationes A C, C D, D B sunt in serie linearum A, E, F: Quod fuit demonstrandum.

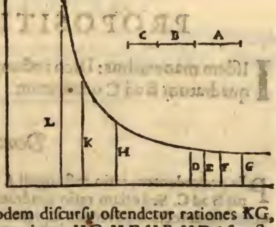
a 1. *lib.* 8. *tom.* 2.

PROPOSITIO LXXXV.

SInt rectæ A, B, C proportionales in serie Geometrica:

Dico illas lineas inservire posse infinitis seriebus rationum proportionalium, loco denominatorum.

Demonstratio.



POnantur D, E, F, G lineæ proportionales in serie A, B, C, [a] erunt igitur segmenta D E, E F, F G inter se æqualia. Ducatur autem quævis H asymptoto parallela, erit [b] ratio H G ad H F ut F ad G, hoc est A ad B, & ratio H F ad H E ut E ad F, hoc est F ad G, hoc est A ad B, hoc est B ad C, denique erit ratio H E ad H D ut D ad E, hoc est rursus ut A ad B: unde rationes H G, H F, H E, H D inter se sunt ut lineæ A, B, C. Sed etiam eodem discursu ostendetur rationes KG, K F, K E, K D, inter se differre, ut differunt rationes H G, H F, H E, H D (si recta K æquidistet asymptoto) & consequenter etiam differre rationes KG, KF, KE, KD, ratione linearum A, B, C. Quod cum conveniat cuicumque asymptoto æquidistanti in hyperbola, patet lineas A, B, C, inservire posse infinitis seriebus rationum proportionalium.

a 109. *l.* 6. *tom.* 2.

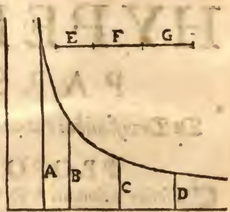
b 7. *lib.* 8. *tom.* 2.

 PRO-

PROPOSITIO LXXXVJ.

Rationes A B, B C, C D supponantur proportionales secundum seriem denominatorum E, F, G:

Dico rationem A B ductam in C D rationem ad ratione͂ B C ductam in se, eam obtinere rationem, quam habet rectangulum E G ad F quadratum.



Demonstratio.

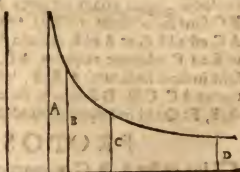
Ratio A D triplicata est rationis B C, igitur ratio A B in C D duplicata est rationis B C, ac proinde æqualis rationi B C ductæ in se; sed etiam ratio rectanguli E G ad F quadratum est æqualitatis; ergo est rectangulum E G ad F quadratum, sicut ratio A B in C D ad rationem B C ductam in se.

PROPOSITIO LXXXVIJ.

Sint rationes A B, B C, C D proportionales:

Dico rectangulum A C, ad B D rectangulum habere duplicatam rationem B ad C.

Demonstratio.



Ratio rectanguli A C ad B D rectangulum
a 23. *sexti.* [a]composita est ex ratione A ad B & ex ratione C ad D: Cum igitur proportionales sint ex constructione rationes A B, B C, C D, ratio A B ducta in C D rationem duplicata est rationis B C; adeoque rectangulum A C ad B D rectangulum duplicatam habet rationem B ad C.

PROPOSITIO LXXXVIIJ.

Iisdem manentibus: Dico rectangulum A C ad B D rectangulum, esse ut quadratum B ad C quadratum.

Demonstratio.

Per præcedentem ratio rectanguli A C ad rectangulum B D duplicata est rationis B ad C. Sed etiam ratio quadrati B ad C quadratum duplicata est rationis, quam habet recta B ad rectam C, igitur ratio rectanguli A C ad rectangulum B D eadem est cum ratione quadrati B ad C quadratum.

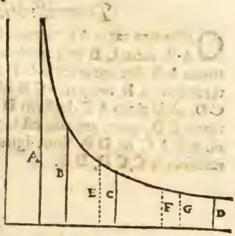
PROPOSITIO LXXXIX.

SIt series rationum proportionalium A B, B C, C D majoris inæqualitatis, & ratio A B minor sit ratione B C.

Dico rationem C D duplo rationis intervallo superare rationem AB, quo ratio B C superat rationem A B.

Demonstratio.

FIat rationi A B æqualis B E, erit ergo ratio E C differentia, quâ distant inter se duæ rationes A B, B C: si autem fuerit C F æqualis ipsi A B, tunc ratio F D erit differentia, quâ distabunt ab invicem rationes A B & C D; igitur si fiat rationi B C æqualis C G, erit C F æqualis rationi B E, & E C æqualis F G igitur, cum sint proportionales rationes A B, BC, C D erũt [a] E C, G D rationes æquales, & consequenter FG çqualis GD, unde intervallum rationis F D duplum est rationis G D, hoc est E C, igitur ratio C D superat rationem A B duplo rationis intervallo, quo ratio B C superat rationem A B.



a 7. hujus.

PROPOSITIO XC.

IIsdem manentibus: Dico rationem A D compositam esse ex triplicatâ ratione A ad B, & ex triplicata ratione illius, quâ differt ratio A B à ratione B C.

Demonstratio.

FIat rationi A B æqualis ratio B E, erit ratio E C differentia, quâ distant inter se rationes A B, B C: deinde rationi B C fiat æqualis ratio C G, & rationi B E æqualis C F, erit [a] ratio B G composita ex duplicata ratione B E, hoc est A B, & ex duplicata ratione E C, additâ igitur rationi B G ratione A B, erit ratio A G composita ex triplicata ratione A B & duplicatâ ratione E C, hoc est ex duplicatâ illius rationis, quâ ratio B C superat rationem A B. Quia denique ratio C D superat rationem B C, hoc est C G, eodem excessu quo ratio B C superat A B rationem, hinc ratio G D æqualis est rationi E C, hoc est F G. Patet igitur si ratio A G ducatur in rationem G D, rationem A D compositam esse ex triplicata ratione A ad B, & ex triplicata ratione E C, hoc est illius, quâ differt ratio A B à ratione B C.

a ex 64. hujus.

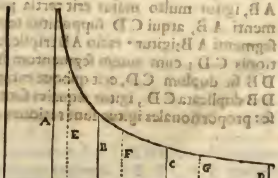
PROPOSITIO XCI.

SVpponantur rationes A B, B C, C D esse Geometricè proportionales, & à ratione A B auferatur quæcumque E B, cui æquales fiant rationes F C, G D.

Dico rationes A E, B F, C G proportionales esse.

Demonstratio.

QUandoquidem Geometricè proportionales sint rationes A B, B C, C D, igitur [a] segmenta A B, B C, C D sunt in Arithmetica serie, in qua cum à singulis sint sublatæ rationes æquales D G, C F, B E, etiam sublata sunt segmenta æqualia à singulis in serie Arithmetica positis. Unde remanserunt segmenta denuo A E, B F, C G in serie Arithmetica, ac proinde [b] rationes A E, B F, C G in serie Geometrica.



a 18. hujus.

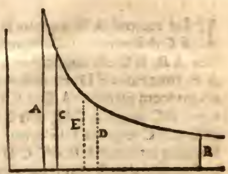
b 19. hujus.

PROPOSITIO XCIJ.

SIt rationis A B pars aliqua A C minor dimidiâ rationis A B: Dico rationem A B dividi posse in tres rationes proportionales, per aliquam lineam inter C & B constitutam, quarum prima sit A C.

Demonstratio.

QUoniam ratio A C minor est dimidia rationis A B, ratio C B major est dimidiâ ejusdem rationis A B, fiat igitur ratio C D æqualis tertiæ parti rationis A B, erit ratio C B adhuc major ratione C D, unde ratio A C ducta in D B duplicata est rationis C D, quare æqualis est ratio C D in se ducta rationi A C in D B. Sunt igitur proportionales rationes A C, C D, D B.



Corollarium.

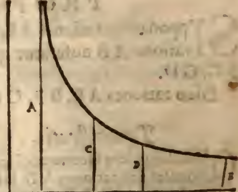
EX hac propositione liquido constat, quod infinitis modis formari queant series trium rationum proportionalium, ex partibus, quibus constat ratio A B, quæ in ipso segmento continentur; eo quod diviso segmento A B bifariam per aliquam rectam E, si quæcumque linea assumatur inter A & E, orietur aliquod segmentum minus dimidio A B, & consequenter etiam ratio minor dimidiâ rationis A B, cui si addatur tertia pars rationis AB, prodibunt tres rationes proportionales, ut docet præsens propositio.

PROPOSITIO XCIII.

SI segmentum hyperbolicum in duas partes inæquales sectum fuerit: Dico quod majus segmentum ita per aliquam lineam dividi possit, ut exhibeantur tres rationes proportionales.

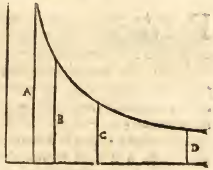
Demonstratio.

SIt AB segmenti, secti per rectam C, pars major C B, & fiat segmenti A B pars tertia CD: Dico A C, C D, D B, rationes proportionales esse. Quod sic demonstro: segmentum C B majus est segmento A C, igitur majus est dimidio A B, igitur multo majus erit tertia parte segmenti A B, atqui C D supponitur tertia pars segmenti A B; igitur [a] ratio AB triplicata est rationis C D; cum autem segmentum A C cum D B sit duplum C D, erit quoque ratio A C in D B duplicata C D, igitur æquales sunt rationes A C in D B, & C D ratio ducta in se: proportionales igitur sunt rationes A C, C D, D B.



a 115. lib. 6. tom. 2.

PROPOSITIO XCIV.



Sit ſegmentum A D biſectum per C, & fiat ratio A D triplicata B C:

Dico lineam B, inter C & A ſitam eſſe.

Demonſtratio.

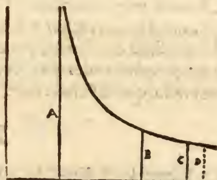
EX vi conſtructionis ſegmentum AC æquale eſt ſegmento CD, eſtque ratio A D triplicata BC, igitur ſegmentum A D triplum eſt BC: igitur pars C B, quæ eſt tertia ſegmenti A D, minor eſt A C, quæ eſt ipſius A D pars dimidia; quare linea C locum obtinet inter C & A.

PROPOSITIO XCV.

Sit ratio A ad B major quam duplicata B ad C:

Dico ſi ſumatur quævis D ultra ſegmentum B C, numquam fore tres rationes A B, B C, C D proportionales.

Demonſtratio.



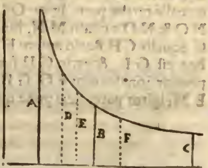
EX conſtructione ſupponitur ratio A B major quam duplicata B C, igitur ſi exhibeatur aliqua ratio C D, quæ ſit cum duabus A B, B C in continua analogia, erit ratio A B ducta in C D æqualis rationi B C in ſe ductæ. Sed ratio A B ſupponitur major quam ratio B C ducta in ſe; igitur cum ratio A B ducta in rationem C D ſit multo major quam ratio A B, nullo modo poterit ratio A B ducta in rationem C D eſſe æqualis rationi B C ductæ in ſe; unde nunquam poterit inveniri tertia proportionalis ad duas rationes A B & B C, per aliquam rationem majoris inæqualitatis C D. Atque hoc rectè colligitur, ſi conſideremus; quod dato ſegmento A B, quod ſit majus duplo ſegmenti B C, non poſſit exhiberi tertium ſegmentum, de quo poſſit affirmari, quod ſegmentum B C ſuperet ſegmentum C D eâdem differentiâ, quâ ſegmentum A B ſuperat ſegmentum B C, cum differentia, quâ ſegmentum A B excedit B C ſegmentum, major ſit ipſo B C ſegmento, & quia hac ratione tria ſegmenta nequeunt conſtitui, in Arithmetica ſerie, hinc non poſſunt exhiberi tres rationes in Geometrica Analogia, ſecundum ea, quæ alibi docuimus.

PROPOSITIO XCVJ.

Poſita ratione A B quæ major ſit quam ratio duplicata B C:

Oporteat tertiam rationem proportionalem ad duas rationes A B & B C exhibere.

Conſtructio & Demonſtratio.

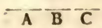


FIat rationi C B æqualis B D, & rationi D C æqualis ratio A E. Dico rationes A B, B C, B E proportionales eſſe, quod ſic demonſtro: Quoniam ex conſtructione ratio D C eſt æqualis A E, eſtque ratio D C duplicata B C, igitur etiam ratio A E erit duplicata B C: eſt ᵃ autẽ ratio A B in BE æqualis rationi A E, igitur ratio A B in B E duplicata eſt rationis B C. Quare tres ſunt proportionales rationes A B, B C & B E. Quod ſi vero rationi B E æqualis ſit C F, tunc apparebunt etiam rationes A B, B C, C F proportionales, cum ratio tertia B E ſit ex conſtructione æqualis C F rationi.

a 65 hujus.

Scholion.

DVas has propositiones in medium attulimus, ut occasio preberetur aliquod dubium expediendi, quod non nullus movere posset: Scilicet, cum datis quibusvis lineis A *&* B, *semper sit assignabilis tertia proportionalis* C, *& econtra; non liceat id affirmare de quibusvis rationibus* A B B C *ut indicant præcedentes propositiones, præsertim penultima. Quod dubium fundatur in non recta interpretatione doctrinæ à nobis hucusque traditæ; nullibi enim asseruimus datis duabus rationibus in aliquibus casibus non esse assignabilem tertiam proportionalem ad duas expositas, sed solum documus in multis casibus tertiam exhiberi non posse, quæ sit maioris inæqualitatis, sicut sunt duæ primæ, ad quas tertia requiritur, nam si ratio* A B *major sit quam duplicata* B C, *asseruimus tertiam rationem posse assignari, sed non maioris inæqualitatis, quemadmodum sunt duæ primæ exhibitæ, rationes nimirum* A *ad* B *&* B *ad* C *propter rationes, quas ipsi discursus in demonstrationibus contenti manifeste convincunt.*

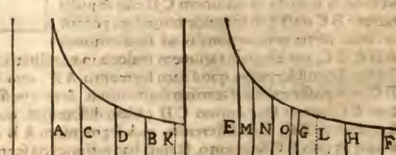


PROPOSITIO XCVIJ.

SEgmentum A B supponatur divisum per lineas C, D, ut resultent tres rationes proportionales A C, C D, D B: Assumatur deinde segmentum E F, quod majus existat A B segmento:

Dico illud dividi posse per duas aliquas lineas G & H, ut resultent tres rationes proportionales E G, G H, H F, quæ inter se differant æquali rationis intervallo, quo differunt inter se rationes A C, C D, D B.

Demonstratio.



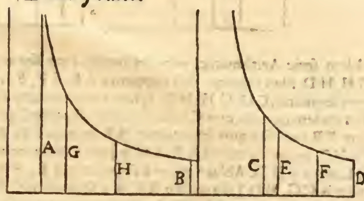
DIfferant inter se rationes A C, C D, D B intervallo rationis B K, cui rationi æquales sint rationes E M, M N, & N O. Deinde segmentum O F intelligatur divisum in tres æquales partes, quarum sit una æqualis rationi H F, secunda similiter æqualis eidem H F sit H L, cui ratio L G adjungatur, quæ sit æqualis N O. Dico rationem E F divisam esse per G & H lineas, ut rationes E G, G H, H F sint proportionales, & eodem inter se differant rationis intervallo, quo discrepant rationes A C, C D, D B; Quod sic demonstro: Cum ratio O F in tres rationes æquales divisa sit ex constructione, & tam H F quam L H sit æqualis tertiæ parti, igitur O L æqualis est H F: Quia vero G L æqualis est rationi N O & N O æqualis M N, hinc N G ratio æqualis est rationi H F, hoc est L H, & M G æqualis G H. Ratio autem E G superat rationem G H, intervallo E M hoc est M N, hoc est G L, & ratio G H superat rationem H F ratione G L, hoc est E M; igitur proportionales sunt E G G H, H F: est autem ex constructione ratio B K æqualis E M; igitur patet fieri posse quod propositio asseruit.

PRO-

PROPOSITIO XCVIIJ.

SIt segmentum A B duplum segmenti C D:
Dico nullam seriem trium rationum proportionalium posse exhiberi, per aliquas lineas E F in segmento C D, cujus seriei duplicata nequeat assignari in segmento A B.

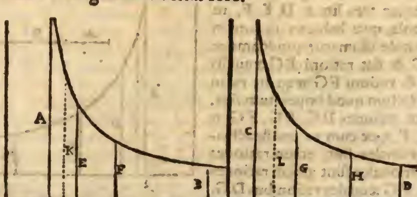
Demonstratio.



POnantur rationes C E, E F. F D proportionales, & rationis CE duplicata AG, erit igitur ut tota ratio A B ad totam C D, ita pars A G ad partem C E, itaque ut tota ad totam ita residua G B ad residuam E D. Deinde fiat G H duplicata rationis E F, erit similiter H B duplicata F D: igitur ratio A G ducta in H B est duplicata rationis C E ductæ in F D. Sed ratio C E in F D est duplicata E F (cum sint proportionales C E, E F, F D) igitur G H æqualis est C E in F D: unde A G in H B duplicata quoque est rationis G H, proportionales itaque sunt rationes A G, GH, HB, suntque singulæ duplicatæ rationum C E, E F, F D; patet igitur veritas propositionis.

PROPOSITIO XCIX.

SI segmentum A B majus & C D minus proportionaliter divisa fuerint secundum eandem seriem Arithmeticam, hoc est ut differentia, quâ A E superat E F, sit æqualis differentiæ, quâ C G superat G H.
Dico rationes emergentes diversas fore.

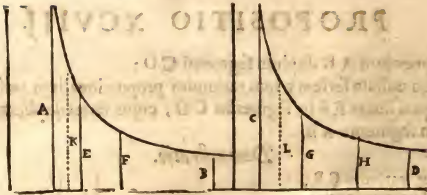


Demonstratio.

EX suppositione segmentum A B in tres partes Arithmeticè proportionales divisum est, scilicet A E, E F, F B, quemadmodum etiam segmenti C D partes C G, G H, H D proportionales sunt secundum eandem seriem Arithmeticam, igitur [a] tam G H est tertia pars segmenti C D, quam E F sit tertia pars segmenti A B. Cum ergo segmentum C D minus sit segmento A B, erit quoque G H segmentum minus E F: segmentum autem A E unà cum segmento F B duplum est segmenti E F, & segmentum C G unà cum H D segmento duplum segmenti G H, igitur A E, F B segmenta simul sumpta majora sunt segmentis C G, H D simul sumptis. Quia vero in

[a] ex 8. & 9. hujus.

eâdem

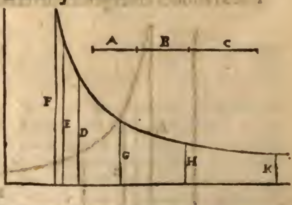


eàdem ſerie Arithmeticâ proportionalia ſunt ſegmenta AE, EF, FB, & CG, GH, HD, ideo ſuperant ſeſe ſegmenta AE, EF, FB, eodem exceſſu quo ſeſe ſuperant ſegmenta CG, GH, HD, igitur ex æqualitate ſuperat quoque AE ſegmentum FB eodem exceſſu, quo CG ſegmentum ſuperat ſegmentum HD: ſit igitur ſegmentum KE exceſſus, quo ſegmentum AE ſuperat FB, & LG exceſſus quo CG ſuperat HD, erunt ſegmenta KE, LG æqualia, ſegmentum autem AK æquale FB, & CL æquale HD. Ablato igitur à ſegmentis AE, FB (quæ ſimul majora ſunt ſegmentis CG, HD) ſegmento KE, & à ſegmentis CG, HD ſegmento LG ablato, remanent ſegmenta AK, FB ſimul ſumpta majora ſegmentis CL, HD ſimul ſumptis: cum vero AK æquale ſit FB, & CL æquale HD, erit AK majus CL & FB majus HD: addatur ergo ſegmentum KE ſegmento AK, & CL ſegmento addatur ſegmentum LG, erit AE majus CG: igitur ſegmenta AE, EF, FB majora ſunt ſegmentis CG, GH, HD & conſequenter rationes AE, EF, FB majores rationibus CG, GH, HD: patet ergo rationes diverſas eſſe.

PROPOSITIO C.

IN data Hyperbola trium ſeriem rationum conſtituere, quarum dati ſint denominatores A, B, C.

Conſtructio & Demonſtratio.



COllocentur tres lineæ D, E, F, in hyperbola, quæ habeant rationem A, B, C, deinde aſſumatur quodcumque punctum G, & fiat rationi EG æqualis ratio GH, & rationi FG æqualis ratio HK: Dico factum quod imperatum fuit.
a 84. *hujus.* ᵃ Sunt enim rationes DG, EG, FG ut lineæ D, E, F, quæ cum ex constructione proportionales ſint, etiam rationes ſunt proportionales; ſunt autem rationes DG, EG, FG æquales rationibus DG, GH, HK, igitur etiam rationes DG, GH, HK proportionales ſunt, & quidem habentes denominatores A, B, C, cum lineæ D, E, F, proportionales ſint in eadem ratione cum lineis A, B, C.

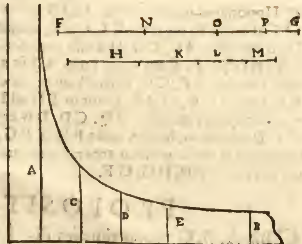
PROPOSITIO CI.

DAtum ſit quodlibet ſegmentum hyperbolicum AB, utcumque diviſum per rectas C, D, E parallelas aſymptoto:

Dico quamcumque lineam FG dividi poſſe ut ejus partes ſint denominatores rationum AC, CD, DE, EB.

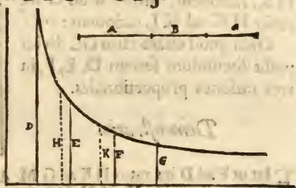
Demon-

Demonstratio.



Fiat rationi A C ad C D æqualis ratio H ad K, & rationi CD ad D E æqualis ratio K ad L, denique rationi D E ad E B, æqualis ratio L ad M, & linea FG dividatur ut est divisa recta H K L M: Dico lineas F N, N O, O P, P G esse denominatores rationum omnium, in quas divisa est ratio A B, lineæ enim H, K, L, M sunt ex constructione denominatores illarum rationum, in quas divisa est ratio A B, sed partes lineæ F G sunt etiam ex constructione in eadem ratione cum lineis H, K, L, M; ergo partes lineæ F G sunt denominatores rationum A C, C D, D E, E B. Quod fuit demonstrandum.

PROPOSITIO CIJ.



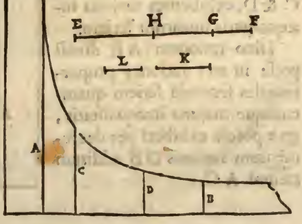
Sint A, B, C, denominatores trium rationum proportionalium DE, EF, FG in serie majoris inæqualitatis:

Dico quod non dividetur segmentum D G per alias lineas in tres rationes proportionales, quarum denominatores sint A, B, C.

Demonstratio.

Sint si fieri possit, H inter D & E, & K inter E & F, exhibentes tres rationes D H, H K, K G proportionales, quarum denominatores sint A, B, C. Quoniam igitur proportionales sunt rationes, erit ratio D G triplicata rationis H K, sed etiam ratio D G triplicata est rationis E F (cum ex constructione rationes quoque D E, E F, F G proportionales sint) æquales ergo sunt rationes E F, H K. Quia vero ratio D E est ad E F rationem, ut A ad B, utque A ad B ita ex suppositione ratio D H ad rationem H K, erit ratio D H ad H K ut D E ad E F; & permutando ratio D H ad D E rationem, ut ratio H K ad E F, quod fieri non potest, cum ratio D H minor sit ratione DE, ratio autem H K æqualis rationi E F. Patet igitur segmentum D G semel divisum in tres rationes proportionales secundum denominatores A, B, C, non posse per alias lineas dividi in tres rationes proportionales secundum eosdem denominatores.

PROPOSITIO CIIJ.



Ponatur segmentum aliquod hyperbolicum A B, sintque proportionales lineæ E H, H G, G F:

Dico quod ratio A B dividi possit in tres rationes, quarum denominatores sint rectæ E H, H G, G F.

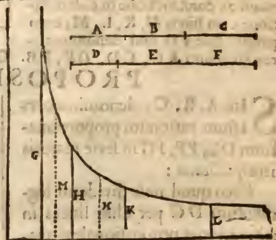
Demonstratio.

SUpponatur quod rationis A ad B tertia pars sit ratio K L; fiat autem ut recta GH ad H E, ita ratio K L ad AC, deinde fiat rationi K L æqualis ratio C D. Dico rationes A C, C D, D B esse proportionales, quarum denominatores sunt EH, H G, G F. Cum enim ratio A B sit triplicata C D, igitur proportionales sunt rationes A C, C D, D B; est autem ex constructione ut G H ad H E ita ratio K L, hoc est C D, ad A C, igitur ut E H ad H G ita ratio A C ad C D, & quia sunt proportionales rationes A C, C D, D B ergo ut C D ratio ad D B, ita ratio AC ad C D rationem, hoc est recta E H ad H G, hoc est H G ad G F. Patet igitur rationem A B dividi posse in tres rationes proportionales, quarum denominatores sint rectæ E H, H G, G F.

PROPOSITIO CIV.

SInt A, B, C proportionales diversæ seriei à serie D, E, F & fiat ut A ad B, ita ratio G H ad H K, rationem, utque B ad C ita ratio H K ad K L rationem:

Dico quod etiam ratio GL dividi possit secundum seriem D, E, F, in tres rationes proportionales.



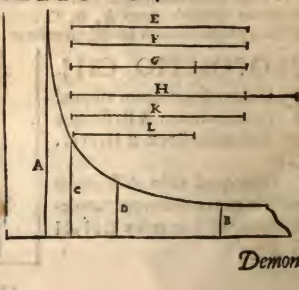
Demonstratio.

FIat ut E ad D ita ratio H K ad G M, deinde fiat rationi H K æqualis M N: Erunt rationes G M, M N, N L inter se, ut sunt D, E, F. Cum enim ratio G L sit triplicata H K, etiam ratio G L est triplicata M N, igitur proportionales sunt rationes G M, M N, N L. Est autem ex constructione ut E ad D ita ratio H K, hoc est M N, ad G M; igitur ut D ad E ita ratio G M ad M N, sed M N ratio est ad rationem N L ut ratio G M ad M N, quoniam proportionales sunt, igitur M N ratio est ad N L rationem ut D ad E, hoc est ex constructione ut E ad F. Sunt igitur D, E, F denominatores rationum G M, M N, N L: quare manifestum est quod ratio G L dividi possit in tres rationes proportionales secundum datam rationem trium linearum, quæ sint in continua serie quacumque, modo L G ratio minor sit ratione D ad E F & A ad B C. &c.

PROPOSITIO CV.

RAtio A B divisa sit in tres partes æquales, per lineas C & D, exhibentes majoris inæqualitatis linearum seriem.

Dico rationem A B dividi posse in tres rationes proportionales secundũ seriem quamcumque majoris inæqualitatis, quæ potest exhiberi per decrementum rationis D B additum rationi A C.



Demon-

Demonſtratio.

SUpponit propoſitio rationes A C, C D, D B æquales eſſe; igitur ſegmenta A C, C D, D B æqualia ſunt, ſicut ſupponimus eſſe lineas E,F,G. Intentio igitur propoſitionis eſt toties poſſe novam ſeriem trium rationum proportionalium exhiberi majoris inæqualitatis, quoties nova ſeries trium linearum, quæ ſit in Arithmetica ſerie poteſt formari, per partem lineæ G ademptam & additam lineæ E; ſublatâ enim aliquâ parte ex lineâ G, & conjunctâ lineæ E, ſi reſultet H, erunt in ſerie Arithmetica H,K,L, ita ut K ſit æqualis F, erit quoque alia ſeries H, K,L, diverſa à ſerie E, F, G: ſic etiam ex ſegmentis AC, C D, DB æqualibus ſi dempta pars à ſegmento DB, accedat ſegmento AC,exſurget ratio Arithmetica alterius ſeriei in ſegmentis, quam erat ſeries ſegmentorum AC, C D, D B. Atqui mutatio ſeriei Arithmeticæ conſtituit novam ſeriem Geometricam in rationibus; igitur quoties fieri poteſt mutatio Arithmetica producens aliquam ſeriem proportionalem Arithmeticè, inter ſegmenta A C, C D, D B: toties continget etiam novam ſeriem emergere in Geometrica ſerie; ſecundum intentionem poſitæ propoſitionis.

Corollarium.

EX hac propoſitione liquido colligitur omnem diſpoſitionem rationis C D in ſegmento A B diverſam ab illa, quæ reliquas A C & D B æquales exhibet, producere novam & novam ſeriem trium proportionalium rationum, ita ut infinitæ diverſæ ſeries reperiri queant per ſolam variationem ſitus rationis C D, vel etiam approximando verſus A, vel ab eadem A ſejungendo.

Ad Majorem Dei Gloriam.

ERRATA.

Paginæ.	Lin.	Errata	Corrige
41.	lin. 29.	G E C lege	G E B
44.	17.	C D H	C D A
44.	22.	Etangulo C R H	Et fiat angulo C R H
53.	37.	ad B F	ad A F
58.	12.	igitur G L	igitur D L
65.	20.	dupliplicatam	duplicatam
66.	7. a fin.	quoque que CFB	quoque C F B
68.	ultima.	BC ad AC ad A B	B C ad A B
69.	12.	B H	G H
77.	26.	M F	M H
78.	penult.	ut B H ad B N	ut B H ad B M
79.	14.	G M	G E
80.	16.	G Q	B R
80.	22.	hoc L B	hoc est L B
84.	6.	A C B, C A D	ACB, CAD, C B D.
104.	penult.	A G	A H
108.	3. a fine.	igitur B L N angulus K L N	igitur K L N angulus B L N
108.	ultima.	B N	K N
135.	2.	D G F	D K F
141	2.	C G	D G
166.	20.	N ad K	M ad K
184.	10.	A K	F K
184.	29.	A K	F K
184.	32.	K A G	F K A G
185.	2 a fi.	major ratione E ad B F	major est ratione E B ad B F
190.	4. a fi.	hoc est ad H	hoc est ut H ad H
193.	10.	F D	F P
204.	13.	ad quadratum	est quadratum
210.	23.	ut quadratum B E	quadratum ut B E
210.	25.	A B F	D E F
211.	Penult.	C F ad C E	C F ad E F
212.	15.	in A & D parabolæ	in C parabolæ
213.	18.	minorem esse	majorem esse
218.	22.	ajoris	majoris
219.	25.	in & P	in N & P
221.	20.	B C	B E
223.	6.	A B C	A B D
224.	4. a fine.	B F G H F C	B F H H F K
228.	20.	D F	B F
230.	31.	lineis	lineas
231.	15.	A B C, iisque	A B C, D B C iisque
232.	3.	rationis	rationibus
237.	13.	C F	C R
	16.	B N	B V
249.	8.	æqualis B E,	æqualis B G, & rationi D C æqualis ratio B E,
249.	22.	serim	seriem
253.	5.	D B D	D B
261.	36.	B C	D C
271.	ultima.	C D	D C
265.	in figura prop. 57. posita est littera K loco F		
279.	in figura loco M vel N ponatur K		
281.	12.	minor quam B	major quam B
291.	10.	linea C	linea B

8.50
95
9.45